МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов Ю. А. Глазков
И. И. Юдина

Геометрия

11

Рабочая тетрадь

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
Ю. А. Глазков И. И. Юдина

Геометрия

Рабочая тетрадь

11 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

Базовый и профильный уровни

8-е издание

Москва «Просвещение» 2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Б93

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 10—11» Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом.

ISBN 978-5-09-030990-5

Глава V

Метод координат в пространстве

§ 1 Координаты точки и координаты вектора

1

Заполните пропуски.

В пространстве задана прямоугольная система координат, если:

а) заданы три попарно ______________________ прямые, проходящие через ________ точку пространства;

б) на каждой из этих прямых выбрано ______________

в) выбрана единица ______________ отрезков.

2

Заполните пропуски.

Если прямоугольная система координат обозначена $Oxyz$, то прямая Ox называется осью __________, прямая Oy — осью ____________, прямая Oz — ________________________

3

Заполните пропуски.

Дана точка $M(2; -3; 0)$. Числа $2, -3,$ __ называются ____________ __________________ точки M; число 2 — это ______________ точки, число -3 — ______________, число 0 — ______________

4

Заполните пропуски.

Если аппликата точки A равна -2, абсцисса равна 0 и ордината равна 3, то $A($__; __; __$)$.

5

Чему равна аппликата точки A, лежащей на: а) оси ординат; б) оси Ox; в) координатной плоскости Oxy?

Ответ. а) __ ; б) __ ; в) __

6

Заполните пропуски:

а) точка $C(0; -3; 0)$ лежит на оси ______________

б) точка $E(2; 0; -1)$ лежит на ______________

в) точка $M(0; 0; m)$ лежит на ______________

г) точка $T(0; t; 0)$ лежит на ______________

7

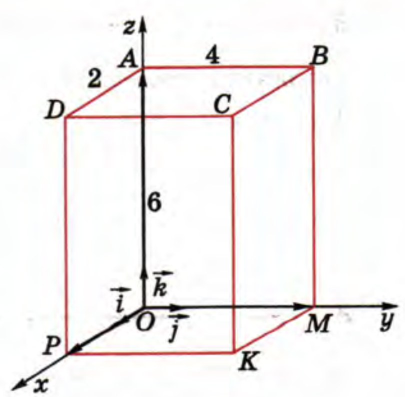
Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 0{,}5\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатные векторы. Запишите координаты вектора $\vec{a}$.

Решение.

Координатами вектора в данной ______________ координат называются ______________ x, y, z разложения этого вектора по ______________ векторам. Для данного вектора $\vec{a}$ имеем $x=2$, $y=$ __ , $z=$ ____ , следовательно, $\vec{a}\{$__; -1; ____$\}$.

Ответ. $\vec{a}$ ______________

8



На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед с измерениями $AB=4$, $AD=2$ и $AO=6$. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OM}$; в) $\overrightarrow{OP}$.

Решение.

Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатные векторы. Тогда:

а) $|\vec{k}| =$ __ , $|\overrightarrow{OA}| =$ __ , следовательно, $\overrightarrow{OA} =$ __ $\vec{k}$;

б) $|\vec{j}| =$ __ , $|\overrightarrow{OM}| =$ __ , следовательно, $\overrightarrow{OM} =$ __ $\vec{j}$;

в) $|\vec{i}| =$ ___ , $|\overrightarrow{OP}| =$ ___ , следовательно, $\overrightarrow{OP} =$ _____

Ответ. а) $\overrightarrow{OA}\{0;\ 0;$ __ $\}$; б) $\overrightarrow{OM}\{$______________$\}$; в) ______________

9

Разложите векторы $\vec{c}\{-1;\ 2;\ -3\}$ и $\vec{p}\{3;\ 0;\ -5\}$ по координатным векторам.

Ответ. $\vec{c} =$ __ $\vec{i} +$ ______ $-$ ______ ; $\vec{p} = 3$ ______________

10

Найдите значения x и z, если $\vec{a}\{x;\ 2;\ -1\} = \vec{b}\{0;\ 2;\ z\}$.

Решение.

По условию задачи векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ __________, следовательно, их соответственные координаты __________ , т. е. $x =$ ___ , $z =$ ___

Ответ. ________________

11

Докажите, что для любых векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

Доказательство.

Координаты вектора — это _________________________ его разложения по координатным _______________ . Значит, $\vec{a} = x_1\vec{i} +$ __ $\vec{j} +$ __ $\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} +$ ________ $+$ ________

Используя законы сложения векторов и ________________ вектора на число, получаем

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} +$ ________ $+$ ________ $) + ($ ________ $+$ ________ $+ z_2\vec{k}) =$

$= (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) +$ ______________________ $=$

$=$ ____ ,

что означает: вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;$ ________ ; ________ $\}$.

12

Найдите координаты вектора $4\vec{a}$, если $\vec{a}\{2;\ 0;\ -0{,}5\}$.

Решение.

Каждая координата произведения вектора на ________ равна ____________ соответствующей координаты данного ________ на это число.

Поэтому вектор $4\vec{a}$ имеет координаты $\{4 \cdot 2;$ ______ ; ______ $\}$, и, значит, $4\vec{a}\{\_\_;\ \_\_;\ -2\}$.

Ответ. $4\vec{a}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$.

13

Найдите координаты вектора $\vec{p}=4\vec{a}-0{,}5\vec{b}-\vec{c}$, если $\vec{a}\{2;\ 0;\ -0{,}5\}$, $\vec{b}\{-4;\ 2;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -3;\ 2\}$.

Решение.

Используя правило умножения вектора на ________ , получаем $4\vec{a}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $-0{,}5\vec{b}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $-\vec{c}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$.

Следовательно, координаты x, y, z вектора $\vec{p}$ равны:

$x=8+$ __ $+$ __ $=$ _____ ; $y=$ __________ $=$ __ ; $z=$ __________ $=$ __

Ответ. $\vec{p}\{\_\_\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$.

14

Докажите утверждения:

а) если соответственные координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны;

б) если соответственные координаты двух векторов не пропорциональны, то векторы не коллинеарны.

Доказательство.

а) Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$.

Так как соответственные ____________________ векторов пропорциональны, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{\_\_}=\frac{\ }{\_\_}=k$.

Следовательно, $x_1=kx_2$, $y_1=$ _____ , $z_1=$ _____ , т. е. вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_2;$ _____ ; _____ $\}$, поэтому $\vec{a}=\_\_\,\vec{b}$. Из определения

__________________ вектора на число следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ __________________

б) Предположим, что векторы $\vec{a}$ и __ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число. Отсюда следует, что координаты векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ пропорциональны, что противоречит условию задачи. Следовательно, предположение __________, т. е. векторы __ и $\vec{b}$ __________________

15

Даны векторы $\vec{m}\{2;\ 6;\ -3\}$, $\vec{n}\{0;\ -3;\ 1{,}5\}$, $\vec{p}\{-4;\ -12;\ 6\}$. Установите, какие из них являются коллинеарными.

Решение.

а) Сравним отношения соответственных координат векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $\frac{0}{2} \neq \frac{-3}{\_\_}$. Итак, абсциссы этих __________ не пропорциональны ____________, поэтому векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ __________________

б) Сравним ______________ соответственных ______________ векторов $\vec{m}$ и $\vec{p}$: $\frac{2}{-4} =$ ____________ $= -0{,}5$. Координаты этих векторов __________________, значит, векторы $\vec{m}$ и ________________

в) Итак, векторы __ и __ коллинеарны, а вектор __ не коллинеарен вектору __, следовательно, он ____________ быть коллинеарным вектору __

Ответ. Коллинеарны векторы __ и __

16

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}\{-6;\ 4;\ -12\}$, $\vec{b}\{1{,}5;\ -1;\ 3\}$, $\vec{c}\{0;\ 4;\ -12\}$;

б) $\vec{p}\{-1;\ 0;\ 2\}$, $\vec{q}\{-1;\ 3;\ 0\}$, $\vec{t}\{2;\ 3;\ -6\}$?

Решение.

а) Любые три вектора, два из которых коллинеарны, являются __________________. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, так как их координаты ______________________: $\frac{-6}{1{,}5} = \frac{4}{\_\_} =$ _____. Поэтому векторы $\vec{a}$, __ и $\vec{c}$ __________________

б) Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ________________________, так как их __________

____________________ не пропорциональны: $\frac{-1}{-1}$ __ $\frac{0}{3}$. В соответствии с

____________________ компланарности трех ____________, если вектор $\vec{t}$

можно разложить по _____________________ $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то векторы $\vec{p}$, __ и $\vec{t}$

____

Проверим, можно ли вектор $\vec{t}$ _____________________ по векторам $\vec{p}$ и __, т. е. существуют ли __________ x и y, такие, что $\vec{t} = x\vec{p} +$ ________

Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 2 = x \cdot (-1) + \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 3 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + y \cdot 3 \\ \_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений: из третьего уравнения находим $x =$ __, а из второго уравнения находим $y =$ __. Подставляя найденные значения x и y в первое __________________, получаем верное

____

Следовательно, пара чисел $x =$ __ и $y = 1$ _________________________ решением системы уравнений, т. е. $\vec{t} = -3\vec{p} +$ __ $\vec{q}$. Поэтому векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{t}$ _________________________

Ответ.

а) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ _________________________

б) Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{t}$ _________________________

17

Запишите координаты радиуса-вектора точки $P(2; -1; 3)$.

Решение.

Радиусом-вектором точки P является ____________, начало которого совпадает с ____________ координат, а конец — с точкой __, т. е. вектор _____ с координатами $\{$__; __; __$\}$.

Ответ. $\overrightarrow{OP}\{$____________$\}$.

18

Дан вектор $\overrightarrow{OT}\{2;\,-1;\,0\}$. Запишите координаты точки T, если точка O — начало координат.

Решение.

Так как началом вектора $\overrightarrow{OT}$ служит ____________ координат, то вектор _____ является ______________________________ точки T, поэтому $T(\_\_;\ \_\_;\ \_\_)$.

Ответ. ________________

19

Даны три точки: $A(5;\,-3;\,2)$, $B(0;\,1;\,-2)$, $C(2;\,-2;\,0)$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

б) Разложите по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ вектор $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{AB}\{0-\_\_;\ \_\_-(-3);\ \_\_\_\_\_\_\}$, т. е. $\overrightarrow{AB}\{\_\_\_\_;\ \_\_\_\_;\ \_\_\_\_\}$;

б) $\overrightarrow{BC}\{2-\_\_;\ \_\_\_\_-1;\ \_\_\_\_\_\_\}$, т. е. $\overrightarrow{BC}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-\_\_\,\vec{j}+\_\_\_\_\_\_$

Ответ.

а) ______________________

б) ______________________

20

Даны точки $P(0;\,1;\,-4)$, $M(-2;\,-1;\,0)$, $E(3;\,5;\,0)$, $C(-1;\,0;\,-2)$, $T(1;\,3;\,4)$.

а) Лежит ли точка C на прямой PM?

б) Лежит ли точка E на прямой CM?

в) Равны ли векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{EC}$?

г) Равны ли векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{ET}$?

Решение.

а) Если векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MC}$ коллинеарны, то точки P, M и C __________ на одной прямой. $\overrightarrow{PM}\{-2-0;\ \_\_\_\_\_\_;\ \_\_\_\_\_\_\}$, т. е. $\overrightarrow{PM}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ 4\}$. $\overrightarrow{MC}\{\_\_\_\_\_\_;\ 0-(-1);\ \_\_\_\_\_\_\}$, т. е. $\overrightarrow{MC}\{\_\_\_\_\_\_\}$.

Так как $\overrightarrow{PM} = \_\_ \overrightarrow{MC}$, то векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MC}$ ________________________, следовательно, точки P, M и C __________ на одной прямой.

б) Выясним, являются ли коллинеарными ____________ $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$: $\overrightarrow{CM}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{CE}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, следовательно, векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$ ____________________________. Значит, точки C, M и E ________________ на одной прямой, иначе векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$ были бы ______________

в) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{EC}$: $\overrightarrow{PM}\{-2;\ \_\_;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{EC}\{\_\_;\ \_\_;\ -2\}$. Следовательно, $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{EC}$.

г) $\overrightarrow{PM}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{ET}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$, следовательно, $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{ET}$.

Ответ.

а) Точка C ______________ на прямой PM;

б) точка E ______________ на прямой ______

в) $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{EC}$;

г) $\overrightarrow{PM} \_\_ \overrightarrow{ET}$.

21

Какие из точек $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(5;\ -3;\ -3)$, $C(1;\ -1;\ -1)$, $E(2;\ -2;\ -1)$, $H(2;\ 1;\ -9)$ лежат в одной плоскости?

Решение.

Если векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, то точки A, B, __ и E ____________ в одной плоскости, а если не компланарны, то точки A, B, __ и __ _________________ в одной _______________

1) Найдем координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}\{3;\ \_\_;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{AC}\{\_\_;\ 0;\ \_\_\}$, $\overrightarrow{AE}\{\_\_;\ \_\_;\ 2\}$. Три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, если один из них __________ разложить по двум другим, т. е. если существуют __________ x и y, такие, что $\overrightarrow{AB} =$ ________ $+ y\overrightarrow{AE}$. Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 3 = -1x + \_\_\ y \\ -2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 0 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Из двух первых уравнений системы получаем $x=$ ______ и $y=$ ______ Подставим эти значения в третье уравнение: $0=-3\cdot 2+$ ________ . Это равенство неверно, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$, ________ и $\overrightarrow{AE}$ ____________ ____________ , и, значит, точки A, B, C и ___ ______________ в одной плоскости.

2) Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AH}$: $\overrightarrow{AB}\{3; -2; \_\_\}$, $\overrightarrow{AC}\{\_\_; 0; 2\}$, $\overrightarrow{AH}\{\_\_; \_\_; \_\_\}$.

$$\begin{cases} 3=-x+\_\_\_\_\_\_ \\ -2=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Из двух первых ________________ системы получаем $x=$ ____ и $y=$ ____. Подставим эти значения в третье уравнение: ___ = = ________________ . Последнее равенство __________ , поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и ______ ________________________ , и, следовательно, точки A, B, C и ___ __________ в одной плоскости.

Ответ. В одной плоскости лежат точки _______________

22

Точки $A(3; 0; -2)$, $B(0; -3; 1)$ и $C(1; -2; 0)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

Решение.

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ________________ каждой из диагоналей, поэтому достаточно найти координаты середины ________________ AC:

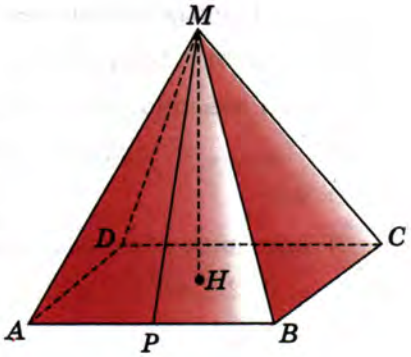
$x=\frac{1}{2}(3+\_\_\_\_)=\_\_\_\_$; $y=$ ____________ $=$ ____; $z=$ ____________ $=$ ____

Ответ. (____; ____; ____).

23

Точки $M(7; 7; 11)$, $A(0; 8; 1)$, $B(6; 0; 1)$ и $C(14; 6; 1)$ являются вершинами правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$. Найдите высоту, апофему и площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.



1) Высота правильной пирамиды проходит через __________ ее основания. Основанием правильной четырехугольной __________ служит __________ Его центр совпадает с точкой пересечения __________, которая является __________ каждой из диагоналей квадрата.

Найдем координаты точки H — середины __________ AC: $x=\frac{1}{2}(14+\_\_)=\_\_$; $y=$ __________ $=\_\_$; $z=$ __________ $=\_\_$. Итак, $H(7;\ \_\_;\ \_\_)$.

Вычислим высоту MH пирамиды:

$$MH=\sqrt{(7-\_\_)^2+(\_\_\_\_\_\_)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_}=\_\_\_\_$$

2) Апофема правильной пирамиды — это отрезок, соединяющий __________ пирамиды с __________ стороны основания. Найдем координаты точки P — середины __________ AB основания: $x=\frac{1}{2}(0+\_\_)=\_\_$; $y=$ __________; $z=$ __________. Итак, $P(\_\_\_\_\_\_)$. Следовательно, $MP=\sqrt{(3-\_\_)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}=$

$=$ __________ $=\_\_\sqrt{5}$.

3) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна __________ произведения __________ основания и апофемы пирамиды. Найдем сторону AB __________ пирамиды:

$$AB=\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}=\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_$$

Вычислим площадь боковой __________ пирамиды:

$$S=\frac{1}{2}\,\_\_\_\_\cdot\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_$$

Ответ.

Высота пирамиды равна ______. Апофема пирамиды равна ______

Площадь боковой поверхности пирамиды равна __________

24

Докажите, что треугольник ABC, где $A(-5;\ 5;\ 1)$, $B(-4;\ 3;\ 0)$, $C(-5;\ 3;\ 1)$, является прямоугольным.

Доказательство.

Проверим, выполняется ли для данного треугольника условие теоремы, __________ теореме Пифагора. Найдем квадраты __________ треугольника: $AB^2=(-4-(\_\_\_))^2+(\_\_\_\_\_\_\_\_)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_=1^2+\_\_\_+\_\_\_=\_\_\_$

$AC^2=$ ____

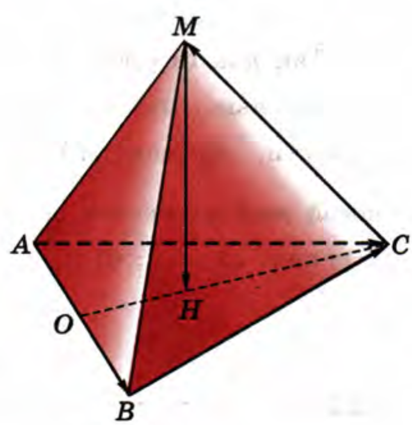
$BC^2=$ ____

Так как $AC^2+BC^2=$ ______, то по теореме, обратной теореме __________, треугольник ABC ________________ прямоугольным, причем $\angle$ ___ $=90°$.

§ 2 Скалярное произведение векторов

25

Отрезок MH — высота правильного тетраэдра $MABC$ с ребром, равным 2 см. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$; е) $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{AB}$.



Решение.

Все грани правильного тетраэдра — ________________________ треугольники, поэтому каждый из углов в этих треугольниках равен ______

а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ отложены от ________________ точки, поэтому угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и ______ равен углу BAC, т. е. $\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}=$ ______
Отсюда получаем $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot$ ____ $\cdot\cos$ ______ $=4\cdot$ ____ $=$ ____

б) Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AB}$ (выполните построение на рисунке). Тогда угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ будет равен углу ____________. Так как углы A_1BC и ABC ________________, то $\angle A_1BC=$

$= 180° -$ ______ $=$ ________ . Поэтому $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}} =$ ________ . Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ___ $\cdot$ ___ $\cdot \cos$ ________ $=$ ________ $=$ ______

в) Отложим от точки C векторы $\overrightarrow{CB_2} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{AC}$ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен углу ______________. Так как углы A_2CB_2 и ACB — ______________________, то $\angle A_2CB_2 = \angle$ ________ $=$ ______ . Следовательно, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ___ $\cdot$ ___ $\times$ $\times$ __________ $=$ ____

г) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$ ______________________, поэтому угол между ними равен ____. Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ______________

д) Так как отрезок MH является ______________ правильного тетраэдра, то точка H — __________ основания тетраэдра, поэтому точка H лежит на ____________ треугольника ABC, и, значит, $CO \perp$ ______ . Поскольку прямая CO является проекцией прямой _____ на плоскость ABC и $CO \perp$ ______ , то по теореме о трех ____________________

$CM \perp$ ______ . Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CM}} =$ ______ . Поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} =$ $=$ ____________ $=$ ________ $=$ ____

е) Так как отрезок MH — ____________ тетраэдра, то MH ___ ABC. Следовательно, по определению прямой, ________________ плоскости, прямая MH ________________ к ____________ прямой этой плоскости, в том числе MH ___ AB. Поэтому $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ____

Ответ. а) ___; б) ___; в) ___; г) ___; д) ___; е) ___

26

Даны векторы $\vec{a}\{4;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{b}\{1;\ 0;\ -\sqrt{3}\}$. Найдите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{b}\vec{a}$; в) $\vec{a}^2$; г) $|\vec{b}|$; д) $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

Решение.

а) $\vec{a}\vec{b} = 4 \cdot$ ___ $+$ ________ $+$ ________ $=$ ___

б) По ____________________ закону скалярного ____________ ________ векторов имеем $\widehat{\vec{b}\,\vec{a}} =$ ______ $=$ ____

в) $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot$ ___ $= 4 \cdot$ ___ $+$ ________ $+$ ________ $=$ ______

г) $|\vec{b}|=\sqrt{\_\_\_\_}$, где $\vec{b}^2=1^2+\_\_\_\_+(\_\_\_\_)^2=\_\_$. Следовательно, $|\vec{b}|=\sqrt{\_\_}=\_\_$

д) $\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\dfrac{|4\cdot\_\_+\_\_\_\_+\_\_\_\_|}{\sqrt{4^2+\_\_+\_\_}\cdot 2}=\dfrac{\_\_}{4\cdot\_\_}=\_\_$. Следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\_\_$

27

При каком значении x векторы $\vec{a}\{x;\ -1;\ 0\}$ и $\vec{b}\{2;\ 6;\ -3\}$ перпендикулярны?

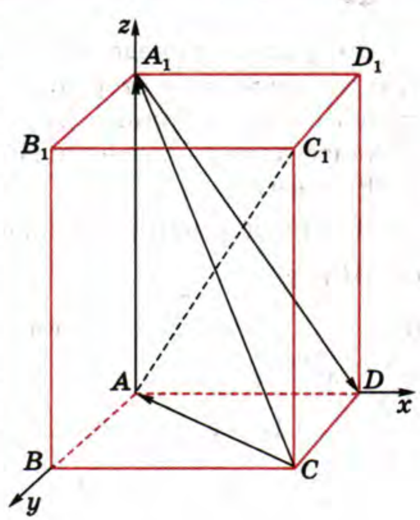
Решение.

Поскольку $\vec{a}\ \_\_\ \vec{0}$ и $\vec{b}\ \_\_\ \vec{0}$, то $\vec{a}\perp\_\_$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}=\_\_$. Из условия $\vec{a}\vec{b}=\_\_$ получаем $x\cdot\_\_+(\_\_)\cdot 6+\_\_\_\_\_=0$. Решим полученное уравнение: $2x-\_\_=0$; $x=\_\_$

Ответ. _____

28

Точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 4;\ 0)$ и $A_1(0;\ 0;\ 5\sqrt{3})$ — вершины прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите: а) $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}$; б) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA_1}$; в) косинус угла φ между прямыми A_1D и AC; г) синус угла α между прямой CA_1 и плоскостью ABC; д) длину диагонали A_1C.



Решение.

а) Найдем координаты ______ $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$: $\overrightarrow{AA_1}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{A_1D}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\_\_\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\cdot\_\_+\_\_\_\_+\_\_\_\_\cdot(-5\sqrt{3})=\_\_\_\_$

б) $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AB}+\_\_\_\_)$, $\overrightarrow{CA_1}=-\overrightarrow{A_1C}=-(\overrightarrow{A_1B_1}+\_\_\_\_+\overrightarrow{A_1A})=-(\overrightarrow{AB}+\_\_\_\_-\_\_\_\_)$, где $\overrightarrow{AB}\{\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{AD}\{\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{\_\_\_\_\}$. Значит, $\overrightarrow{CA}\{-3;\ \_\_\_;\ 0\}$, $\overrightarrow{CA_1}\{\_\_\_;\ -4;\ \_\_\_\}$. Отсюда получаем $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA_1}=3\cdot\_\_\_+\_\_\_+\_\_\_\_=\_\_\_$

в) Направляющими векторами прямых $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AC}$ служат векторы $\overrightarrow{A_1D}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\_\_\}$ и $\overrightarrow{AC}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\}$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot\_\_+\_\_\cdot 4+\_\_\_\_\_\_\_\_|}{\sqrt{\_\_+4^2+(\_\_\_\_)^2}\cdot\sqrt{\_\_+\_\_+\_\_}} = \frac{16}{\sqrt{91}\cdot\_\_\_\_} = \frac{16}{455}\sqrt{\_\_\_\_}$$

г) Синус угла α между прямой CA_1 и __________ ABC равен модулю __________ угла β между направляющим ________ $\overrightarrow{CA_1}$ прямой CA_1 и вектором $\overrightarrow{AA_1}$, перпендикулярным плоскости ______. Так как $\overrightarrow{CA_1}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$, то $\sin\alpha = |\_\_\_\_|=$

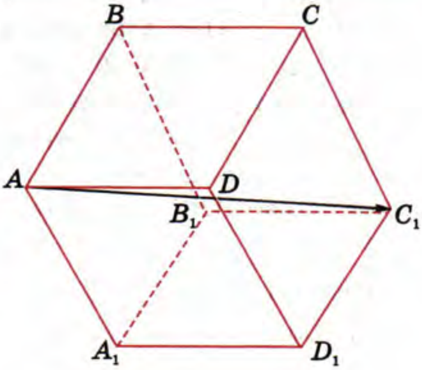
$$= \frac{|\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_|}{\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_}\cdot\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_}} = \frac{|\_\_\_\_|}{\_\_\_\_\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\_\_\_\_}.$$

д) Длина отрезка A_1C равна ________ вектора $\overrightarrow{CA_1}$, т. е. $A_1C = |\overrightarrow{CA_1}| = \sqrt{(\_\_\_\_)^2} = \sqrt{(-3)^2+\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_$

Ответ. а) ____; б) ____; в) ________; г) ____; д) ____

29

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — ромбы со стороной a. Все углы граней при вершине A равны 60°. Найдите длину диагонали AC_1.



Решение.

По правилу параллелепипеда получаем $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$. Так как $AC_1 = |\_\_\_\_| = \sqrt{\overrightarrow{AC_1}^2}$, найдем сначала $\overrightarrow{AC_1}^2$:

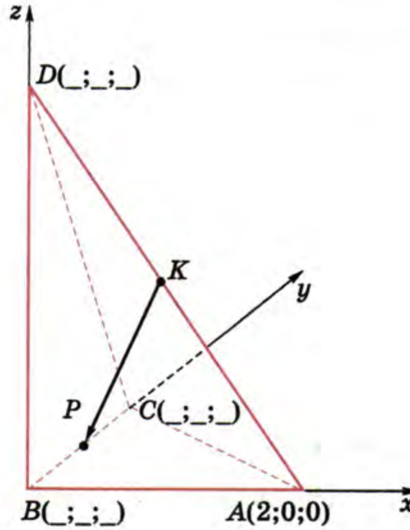
$$\overrightarrow{AC_1}^2 = (\_\_\_\_ + \overrightarrow{AB} + \_\_\_\_)^2 =$$
$$= (\overrightarrow{AA_1} + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_))^2 =$$
$$= \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AA_1}(\_\_\_\_ + \_\_\_\_) + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2 =$$
$$= \overrightarrow{AA_1}^2 + \_\_\_\_ + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) =$$
$$= a^2 + a^2 + \_\_\_\_\ 2(a^2\cos 60° + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) =$$
$$= \_\_\ a^2 + 2\cdot 3\ \_\_\ \cdot\frac{1}{2} = 6\ \_\_\_\_$$

Итак, $AC_1{}^2 = \_\_\ a^2$, следовательно, $AC_1 = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. ________

30

В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 90°$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. Вычислите синус угла между прямой, проходящей через середины ребер AD и BC и плоскостью грани ABD. (Задача 470а учебника.)



Решение.

По условию $\angle ABC = \angle$ ______________ $= \angle CBD =$ ___. Поэтому можно ввести прямоугольную систему координат с началом в точке B так, как показано на рисунке. Тогда $A(2;\ 0;\ \underline{\quad})$, $C(0;\ \underline{\quad};\ 0)$, $D(0;\ \underline{\quad};\ \underline{\quad})$.

1) Пусть точка K — середина ребра AD, точка P — середина ___________ BC. Тогда $K(1;\ \underline{\quad};\ \underline{\quad})$, $P(\underline{\quad};\ 0{,}5;\ \underline{\quad})$.

2) Пусть φ — угол между прямой KP и __________________________ грани ABD. Синус угла φ равен модулю __________________ угла β между __________________________ вектором $\overrightarrow{KP}$ прямой KP и вектором $\overrightarrow{BC}$, __________________________ к плоскости ABD.

Так как $\overrightarrow{KP}\{-1;\ \underline{\qquad};\ \underline{\qquad}\}$, $\overrightarrow{BC}\{0;\ \underline{\quad};\ \underline{\quad}\}$, то

$$\sin\varphi = |\cos \underline{\quad}| = \frac{|-1\cdot 0 + 0{,}5\cdot \underline{\quad} + (\underline{\quad})\cdot \underline{\quad}|}{\sqrt{1^2 + \underline{\qquad}}\cdot\sqrt{0^2+\underline{\qquad}}} = \frac{|\underline{\qquad}|}{\sqrt{\underline{\qquad}}\cdot\sqrt{\underline{\quad}}} = \underline{\quad}$$

Ответ. __________

§ 3 Движения

31

Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(2;\ 0;\ -3)$, $C(0;\ -1;\ 2)$ при:

а) центральной симметрии относительно начала координат;

б) осевой симметрии относительно оси ординат;

в) зеркальной симметрии относительно плоскости Oxz.

Решение.

а) При центральной ________________________ относительно начала координат точка $M(x; y; z)$ переходит в точку $M_1(-x;$ _____ ; _____). Следовательно, точка $A(2; -1;$ ___) переходит в точку A_1(___ ; ___ ; -3), точка B(__________) — в точку $B_1(-2;$ ___; ___), точка C(__________) — в точку C_1(__________).

б) При осевой ____________________ относительно _________ ординат точка $M(x; y; z)$ переходит в точку M_2(___ ; ___; $-z$). Следовательно, точка A(___ ; -1; 3) переходит в точку $A_2(-2;$ ___ ; ___), точка $B(2;$ ___ ; ___) — в точку B_2(___ ; ___ ; 3), точка C(__________) — в точку C_2(___ ; -1; ___).

в) При ____________ симметрии относительно ________________ Oxz точка $M(x; y; z)$ переходит в точку $M_3(x;$ ___ ; ___). Следовательно, точка $A(2;$ ___ ; 3) переходит в точку A_3(___ ; 1; ___), точка B(___ ; 0; -3) — в точку $B_3(2;$ ___ ; ___), точка C(__________) — в точку C_3(___ ; ___ ; ___).

Ответ.

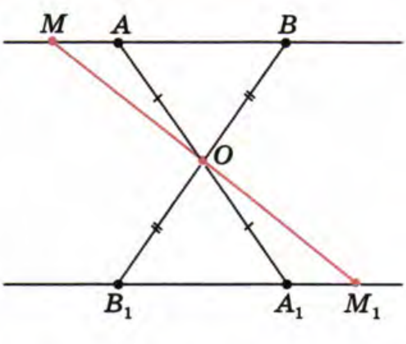
а) A_1(__________), B_1(__________), C_1(__________);

б) A_2(__________), ______________________________

в) ____

32

Докажите, что при центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую. (Задача 479а учебника.)



Доказательство.

1) Рассмотрим центральную _________________________________ с центром O и произвольную прямую AB, не проходящую через точку O. Через прямую AB и __________ O проходит ________________, и притом только __________. Обозначим ее буквой α. Точки A и B переходят при данной симметрии в __________ A_1 и B_1, также лежащие в _______________ α. Поэтому и вся прямая A_1B_1 __________________ в плоскости α.

2) Докажем, что $A_1B_1 \parallel$ ______ . Так как $\triangle OAB$ ______ $\triangle OA_1B_1$ (по двум ____________ и ____________ между ними: $OA =$ ______ , ______ $= OB_1$, $\angle AOB = \angle$ ________), то $\angle ABO =$ ________ . Значит, равны __________ лежащие углы при пересечении прямых AB и ______ секущей ______ Поэтому AB ______ A_1B_1.

3) Осталось доказать, что при симметрии с центром O прямая AB __________________ на прямую ______ . Для этого нужно доказать, что при данной симметрии любая _____________ M прямой AB переходит в некоторую точку прямой ______ , и, обратно, произвольная точка N_1 прямой A_1B_1 симметрична какой-то точке ____________ AB.

Рассмотрим произвольную точку M на ____________ AB, отличную от точки A, и проведем прямую MO. Она пересекает ____________ A_1B_1 в точке M_1. Тогда $\angle MOA = \angle$ ________ (вертикальные углы), $\angle MAO = \angle$ ________ (______________________________ при пересечении __________________________ прямых ________ и A_1B_1 секущей ______). Кроме того, $AO =$ ______ (точки A и A_1 _______________________ относительно точки O). Следовательно, $\triangle MAO = \triangle$ ___________ (по стороне и ____________________________________). Отсюда следует, что $MO =$ $=$ ______ , и, значит, точка M при симметрии с центром O переходит в точку _____ , лежащую на прямой A_1B_1.

Аналогично доказывается, что любая точка N_1 прямой A_1B_1 симметрична некоторой __________ N прямой AB.

33

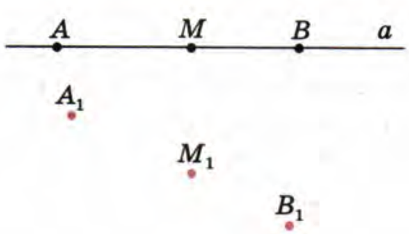
Докажите, что при движении прямая отображается на прямую. (Задача 486а учебника.)

Доказательство.

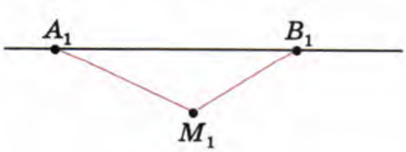
Рассмотрим произвольную прямую a. Пусть точки A и B, лежащие на прямой ___ , при данном движении f переходят в точки A_1 и B_1. Докажем, что при этом прямая a отображается на ____________ A_1B_1, т. е.:

а) каждая точка M прямой a переходит в какую-то __________ прямой A_1B_1;

б) в каждую точку M_1 прямой A_1B_1 ____________________ какая-то точка прямой ___



а)



б)

Возьмем произвольную точку M на ______________ a. Пусть для определенности точка M лежит между ______________ A и B (при другом расположении точек доказательство аналогично). Тогда $AM + MB =$ ______

Пусть при данном движении f точка M переходит в какую-то ______________ M_1. Поскольку f — движение, то A_1M_1 __ AM, $M_1B_1 =$ $=$ ______, $A_1B_1 =$ ______. Следовательно, $A_1M_1 + M_1B_1 = AM +$ ______ $=$ $=$ ______ $= A_1B_1$.

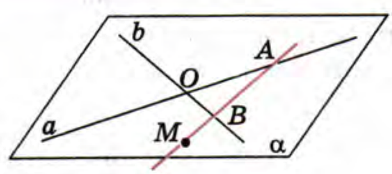
Итак, $A_1M_1 +$ ______ $= A_1B_1$, т. е. точка M_1 лежит ______________ точками ______________ B_1 (в противном случае согласно неравенству ______________________ A_1M_1 __ $M_1B_1 > A_1B_1$).

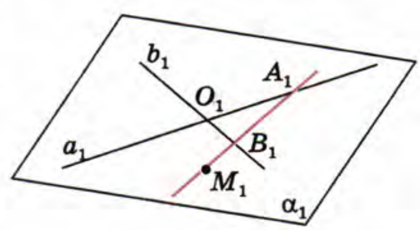
б) Аналогично можно доказать, что в ______________ точку M_1 прямой A_1B_1 переходит какая-то ____________________________ a.

Таким образом, при движении прямая ____________________________ на прямую.

34

Докажите, что при движении плоскость отображается на плоскость. (Задача 486б учебника.)





Доказательство.

Возьмем произвольную плоскость α и проведем в ней две пересекающиеся прямые a и b (O — точка пересечения). При данном движении ______________ a и b переходят в некоторые ______________ a_1 и b_1, точка O — в какую-то точку O_1. Так как $O \in$ __ и O __ b, то O_1 __ a_1 и $O_1 \in$ __, следовательно, прямые a_1 и b_1 ____________________________ в точке O_1.

Через пересекающиеся прямые a_1 и __ проходит плоскость, и притом ______________________ (обозначим ее α_1). Докажем, что при данном движении ______________ α отображается на плоскость α_1.

Для этого надо доказать, что:

а) произвольная точка M плоскости α переходит в некоторую ________ M_1 плоскости __

б) в любую точку плоскости α_1 переходит некоторая ____________ ________ α.

а) Через произвольную точку M плоскости α проведем прямую, пересекающую __________ a и __ в каких-то точках A и B. При данном движении точка A ______________ в некоторую ________ A_1 прямой a_1, точка B — в _________ B_1 прямой __, а прямая AB — в прямую _____. При этом точка M прямой AB переходит в некоторую ________ M_1, лежащую на ______________ A_1B_1. Так как A_1 __ α_1 и B_1 __ α_1, то прямая A_1B_1 лежит в ___________________, в частности M_1 __ α_1.

б) Аналогично доказывается, что в любую точку ______________ α_1 переходит ___________ точка плоскости __

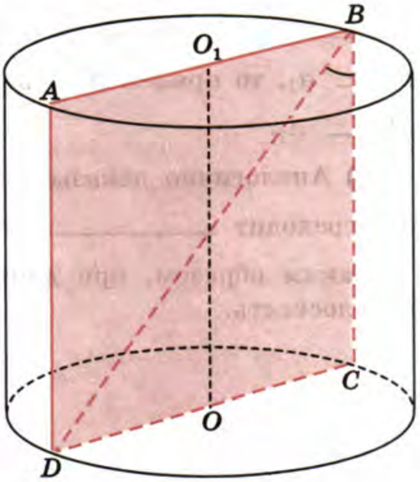
Таким образом, при движении плоскость ____________________ на плоскость.

Глава VI

Цилиндр, конус и шар

§ 1 Цилиндр

35



Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60°. Найдите:

а) высоту цилиндра;

б) радиус цилиндра;

в) площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Осевое сечение цилиндра представляет собой ____________________, стороны BC и AD которого являются ____________________ цилиндра, а две другие стороны — ________________ оснований цилиндра. По условию задачи $BD =$ ______ см, $\angle DBC =$ ______

а) Высота цилиндра равна его __________________________, а $BC = BD \cdot \cos$ ______ $=$ ____ $\cdot \frac{1}{2} =$ ____ (см), т. е. высота ________________ равна ______ см.

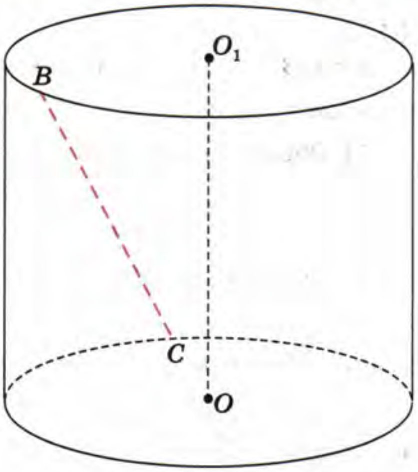
б) Радиус цилиндра — это __________________ основания цилиндра: $OC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} BD \cdot$ __________ $= \frac{1}{2} \cdot$ ____ $\cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_} =$ ________ (см).

в) Площадь боковой ____________________ цилиндра равна произведению __________ окружности __________________________ цилиндра на ____________ цилиндра, т. е. $S_{бок} = 2\pi$ __ $h =$ ______ $\cdot 2\sqrt{3} \cdot$ __ $=$ ______ $\sqrt{3}\pi$ (см²).

Ответ.

а) _______ см; б) ____________ см; в) __________________ см².

Концы отрезка BC лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен 10 дм, $BC = 13$ дм, а расстояние между прямой BC и осью цилиндра равно 8 дм. Найдите высоту цилиндра. (Задача 527а учебника.)



Решение.

1) Проведем образующую AB цилиндра (выполните построение на рисунке). Так как $OO_1 \parallel AB$, то прямая OO_1 ________________ плоскости ABC (по ____________ параллельности прямой и плоскости).

2) Проведем перпендикуляр OK к прямой AC (выполните построение на рисунке). Так как OK лежит в плоскости AOC основания ____________, OO_1 __ ABC, то OO_1 __ OK.

Итак, OO_1 __ AB и OO_1 __ OK, следовательно, OK __ . Таким образом, прямая OK перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AC и ____ плоскости ______ , следовательно, OK __ ABC (по ______ ______________________ прямой и плоскости). Поэтому расстояние между прямыми AB и OO_1 равно ____ , т. е. $OK =$ ____ дм.

3) По условию задачи $AO =$ ____ дм (радиус ____________). В прямоугольном треугольнике AKO катет $AK = \sqrt{AO^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - 8^2} =$ ____ (дм), поэтому $AC =$ ____ дм.

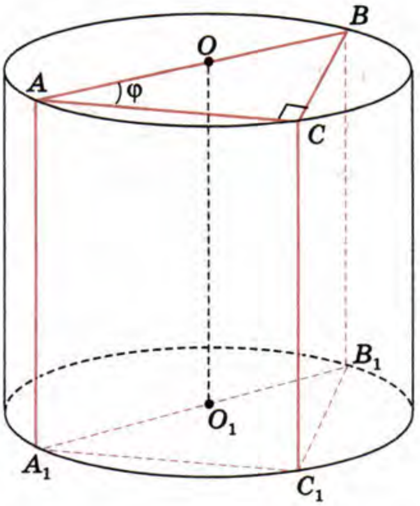
4) В треугольнике ABC катет $AB = \sqrt{\_\_\_\_ - AC^2} = \sqrt{13^2 - \_\_\_\_} =$ ____ (дм).

Ответ. ____ дм.

Через образующую AA_1 цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ. (Задача 532 учебника.)

Решение.

На рисунке изображены образующая AA_1 и секущие ________________ CAA_1C_1 и BAA_1B_1, причем плоскость BAA_1B_1 проходит через ось ________________



1) Образующая AA_1 ________________ ________________ к плоскости ABC основания цилиндра, следовательно, AA_1 __ AB и AA_1 __ AC. Поэтому $\angle BAC$ — ________________ угол двугранного угла, образованного секущими ________ ________________. По условию задачи $\angle BAC =$ __

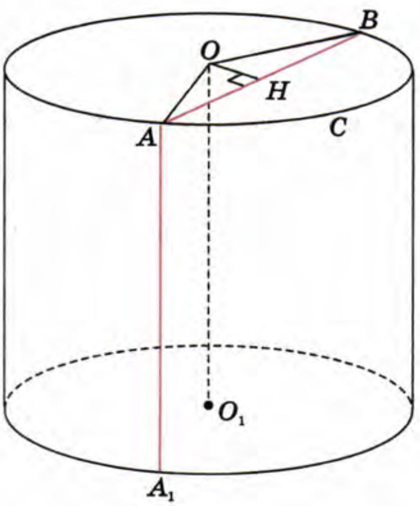
2) Так как плоскость BAA_1B_1 проходит через ________ цилиндра, то отрезок AB — ________________ основания, и поэтому $\angle ACB = 90°$. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC =$ ______ $\cos\varphi$.

3) $\dfrac{S_{CAA_1C_1}}{S_{BAA_1B_1}} = \dfrac{AC \cdot \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_ \cdot AA_1} = \dfrac{AC}{\_\_\_\_\_\_} =$ ____________

Ответ. ____________

38

Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна h, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно d. (Задача 534 учебника.)



Решение.

Искомое сечение представляет собой ________________ ABB_1A_1 (закончите построение на рисунке).

1) По условию задачи $AA_1 =$ ______, $\smile ACB =$ ________. Проведем $OH \perp AB$, тогда OH — ________________ к плоскости сечения. По условию задачи $OH =$ __

2) В равнобедренном ______________________ AOB отрезок OH — высота и, следовательно, ________________ и __________________________

Поэтому $AB = 2$ _____, а так как $\angle AOB =$ _______, то $\angle AOH =$ _______

В прямоугольном треугольнике AOH $AH = OH \cdot$ __________ $=$ __ $\sqrt{}$

3) Итак, $AB =$ _____ $AH = 2d\sqrt{}$, $AA_1 =$ __________, следовательно, $S_{ABB_1A_1} =$ _____ $\cdot AA_1 = 2\sqrt{3}$ _____

Ответ. _____ dh.

39

Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра. (Задача 538 учебника.)

Решение.

Пусть h — высота цилиндра, r — его радиус. По условию задачи $S_{бок} =$ __, т. е.

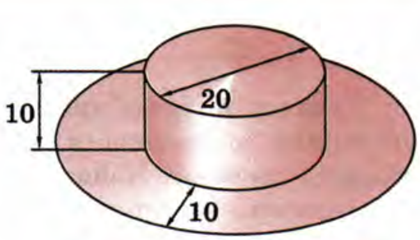
$$2\pi r \_\_ = S. \quad (1)$$

Осевым сечением цилиндра является ________________________ со сторонами $2r$ и __. Поэтому площадь осевого сечения равна _____ $\cdot h$. Учитывая равенство (1), получаем $2rh = \frac{S}{\_\_}$.

Ответ. __________

40

Найдите площадь поверхности (внешней и внутренней) шляпы, размеры которой (в см) указаны на рисунке.



Решение.

Если дно шляпы опустить на плоскость ее полей, то получим круг радиуса $r =$ _____ см.

Площадь этого круга $S_{кр} = \pi$ _____ $=$ _______ (см^2).

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндрической части вычисляем по формуле $S_{бок} =$ _______ $r_1 h$, где $r_1 =$ _______ см, _______ $= 10$ см.

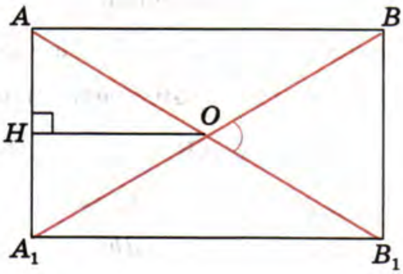
Следовательно, $S_{бок} =$ _____ $10 \cdot 10 =$ _______ (см^2).

Итак, $S_{шляпы} = 2(S_{кр} +$ _____ $) =$ _________ см^2.

Ответ. _________ см^2.

41

Угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра равен 60°, диагональ равна 6 м. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Решение.

На рисунке изображена развертка боковой ________________ цилиндра — прямоугольник AA_1B_1B, где AA_1 и BB_1 — ________________ цилиндра. По условию $\angle AOA_1 =$ ______, $AB_1 =$ ______

1) Так как в прямоугольнике AA_1B_1B AB_1 ____ A_1B, AO ____ OB_1 и A_1O ___ OB, то треугольник AOA_1 — ________________. Следовательно, его высота OH является ____________ и ________________

Поэтому $AH =$ ___ AA_1, $\angle AOH =$ ____, $AH = AO \cdot \sin$ ____ $=$ ___ $\cdot \frac{—}{2} =$ ____, $HO = AO \cdot$ ________ $=$ ___ $\cdot$ _____ $=$ ________, $AA_1 = –AH =$ ________, $AB =$ ___ $HO =$ ______

2) Пусть r — радиус цилиндра, тогда $AB =$ _____ r, т. е. $2\pi r =$ $=$ ______, откуда $r = \frac{3\sqrt{\_\_}}{\_\_}$

3) $S_{цил} = S_{бок} + 2$ ________, где $S_{бок} = AB \cdot$ ________ $=$ ________ $=$ $=$ ______ (м²), $S_{осн} = \pi$ _____ $=$ ______ (м²).

Итак, $S_{цил} =$ ______ $+$ ______ $=$ __________ (м²).

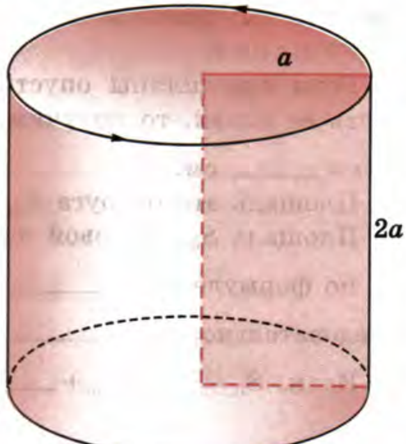
Ответ. ________________

42

Цилиндр получен вращением прямоугольника со сторонами a и $2a$ вокруг большей стороны. Найдите площадь:

а) осевого сечения цилиндра;

б) боковой поверхности цилиндра.



Решение.

Пусть r — радиус цилиндра, h — его высота. По условию $r =$ ___, $h =$ _____

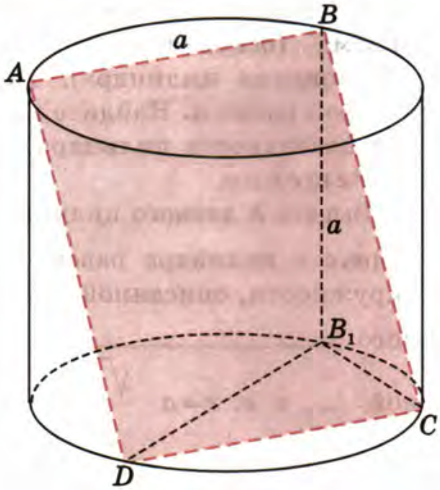
а) $S_{сеч} = 2a \cdot$ _____ $= 4$ _____

б) $S_{бок} = 2\pi$ ___ $h =$ _____ $\cdot a \cdot$ _____ $=$ $=$ ___ π _____

Ответ. а) ______; б) ______

43

Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности одного из оснований цилиндра, а вершины C и D — на окружности другого основания. Вычислите радиус цилиндра, если его образующая равна a, $AB = a$, а угол между прямой BC и плоскостью цилиндра равен 60°. (Задача 602 учебника.)



Решение.

1) Пусть BB_1 — образующая цилиндра, тогда отрезок BB_1 — перпендикуляр к ______ основания и поэтому прямая B_1C — проекция прямой ____ на плоскость ______ цилиндра. Следовательно, угол между ______ BC и плоскостью ______ цилиндра равен углу ____. По условию $\angle BCB_1 =$ ____, $BB_1 =$ __, поэтому $B_1C = \frac{BB_1}{\_\_\_\_} =$ ____

2) Так как по условию $BC \perp$ ____, то $B_1C \perp$ ____ (по обратной теореме ______), т. е. $\angle B_1CD =$ ______

Поэтому отрезок B_1D — ______ основания цилиндра.

3) В прямоугольном треугольнике B_1CD $CD =$ ____ $= a$, $B_1C =$ ____, следовательно, $B_1D = \sqrt{CD^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ + \_\_\_\_} =$ ____. Поэтому радиус цилиндра равен ____

Ответ. ____

44

Найдите радиус цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметр его осевого сечения равен 12 м.

Решение.

Пусть радиус цилиндра равен r, тогда высота цилиндра равна __ $- 2r$,

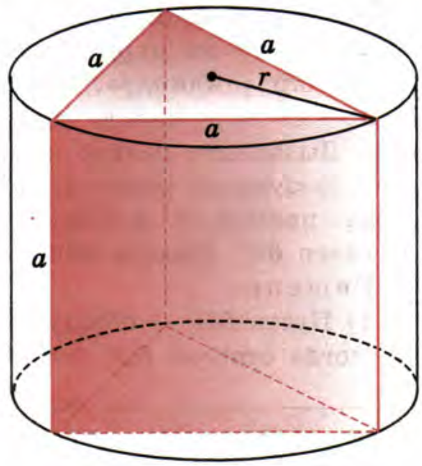
$$S_{бок} = \_\_\_\_ r(6 - 2\_\_) = 4\pi(-r^2 + \_\_\_\_).$$

Квадратный двучлен ______ $+ 3r$ имеет корни $r =$ __ и $r =$ __

Поэтому $S_{бок}$ имеет наибольшее значение, если $r =$ ____ м.

Ответ. ____

45



В цилиндр вписана треугольная призма (основания призмы вписаны в основания цилиндра), каждое ребро которой равно a. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Высота h данного цилиндра равна ___,

радиус r цилиндра равен _____________ окружности, описанной около правильного ___________________________ со стороной ___, т. е. $r = a\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ =

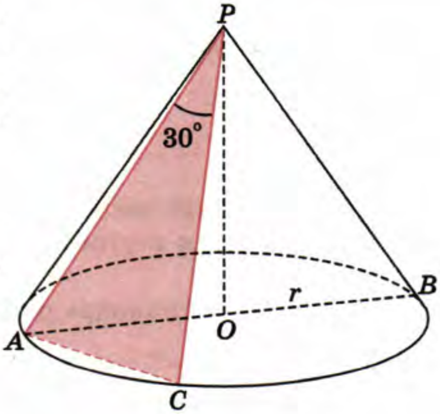
$S_{бок} = 2\pi$ _______ = _______ $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ · ___ =

= ___________ a^2.

Ответ. ______________

§ 2 Конус

46



Радиус основания конуса равен 2 м, а осевое сечение — прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 30°.

Решение.

По условию задачи треугольник APB — ______________________________, а так как $PA =$ ______, то $\angle PAO = 45°$. В прямоугольном треугольнике PAO катет $PA =$ $= \frac{AO}{\cos\_\_\_\_} =$ ___$\sqrt{2}$ м.

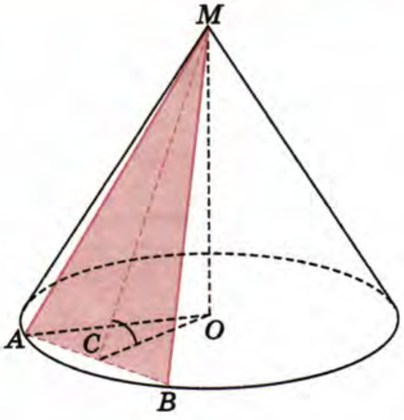
Пусть $\angle APC = 30°$, тогда сечение, проведенное через образующие PA и

______ , является ________________________________ треугольником, в котором $PC =$ ______ $= 2$ ______ м. Поэтому $S_{APC} = \frac{1}{2} PA^2 \cdot$ __________ $=$
$= \frac{1}{2}$ (________)$^2 \cdot \frac{1}{2} =$ __ (м^2).

Ответ. ________

47

Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол 45°. (Задача 555б учебника.)



Решение.

1) Так как хорда AB стягивает дугу в 60°, то $AB = OA =$ ______

2) Проведем OC перпендикулярно к AB. Тогда $AB \perp$ ______ (по теореме о трех ________________________) и $\angle MCO$ — ____________________ угол двугранного угла с ребром ______ . По условию $\angle MCO =$ ______

3) В треугольнике MCO $CO =$ ______ $=$ ______ см, $MC =$ ________ см.

4) Из треугольника AOC получаем $OA = \frac{\_\_\_\_}{\cos 30°} =$ ______ см. Поэтому $AB =$ ________ см.

5) $S_{MAB} = \frac{1}{2}$ ______ $\cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot$ ________ $=$ __________ (см^2).

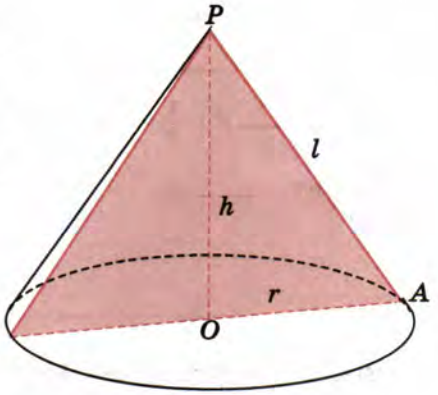
Ответ. ________________

48

Развертка боковой поверхности конуса — сектор с радиусом 4 м и дугой в 90°. Найдите радиус основания и высоту конуса.

Решение.

Обозначим радиус основания данного ____________ буквой r, высоту — буквой h, образующую — буквой l. По условию $l =$ __ м, площадь развертки (сектора) равна $\frac{\_\_ l^2}{360} \cdot$ ______ $=$ __ π м². Поэтому $S_{бок} = \pi$ __ $l = 4\pi$, откуда получаем $r =$ __ м.



Из прямоугольного треугольника POA находим: $h = \sqrt{l^2 - \_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} =$

$= \sqrt{\_\_\_\_\_\_}$ (м).

Ответ. $r =$ ________; $h =$ ________

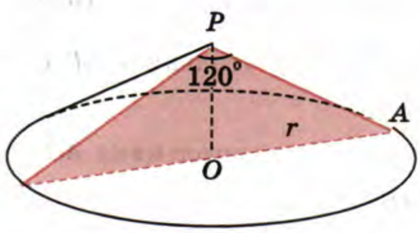
49

Осевое сечение конуса — треугольник со стороной 8 см и прилежащим углом 120°. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение.

Осевым сечением конуса является ________________________ треугольник. По условию задачи один из углов этого треугольника равен ________, следовательно, это угол, противолежащий ____________ стороне треугольника, а потому боковые стороны треугольника равны __ см, т. е. образующая l конуса равна __ см. Из прямоугольного треугольника POA находим радиус основания конуса: $r = l \cdot$ __________ $=$ __ $\frac{\sqrt{3}}{2} =$ ________ (см). Таким образом, $S_{бок} = \pi$ ______ $=$ __ $\cdot 4\sqrt{3} \cdot$ __ $=$ __________ (см²), $S_{кон} = S_{бок} +$ ________ $=$

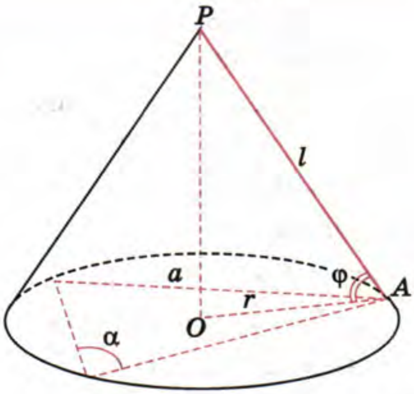
$=$ __________ $+ (\_\_\_\_\_\_\_\_)^2 \pi = 16 (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) \pi$ (см²).



Ответ. ____________________

50

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий угол равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса. (Задача 564 учебника.)



Решение.

1) Находим радиус основания конуса: $r = \frac{\_\_\_\_}{2 \sin \alpha}$.

2) Из прямоугольного треугольника

POA находим образующую: $l = PA = \frac{\_\_\_\_}{\cos \varphi} =$

$= \frac{a}{2 \sin \alpha \cdot \_\_\_\_\_\_}$

3) $S_{бок} = \pi \_\_\_\_\_\_ = \frac{\_\_\_\_\_\_}{4 \sin^2 \alpha \cos \varphi}$,

$S_{осн} = \pi \_\_\_\_\_\_ = \frac{\pi a^2}{\_\_\_\_\_\_}$,

$S_{кон} = \_\_\_\_\_\_ + S_{осн} = \frac{\pi a^2}{\_\_\_\_\_\_} + \frac{\_\_\_\_}{4 \sin^2 \alpha} = \_\_\_\_\_\_ \left(\frac{1}{\cos \varphi} + 1\right)$.

Ответ. ____________________

51

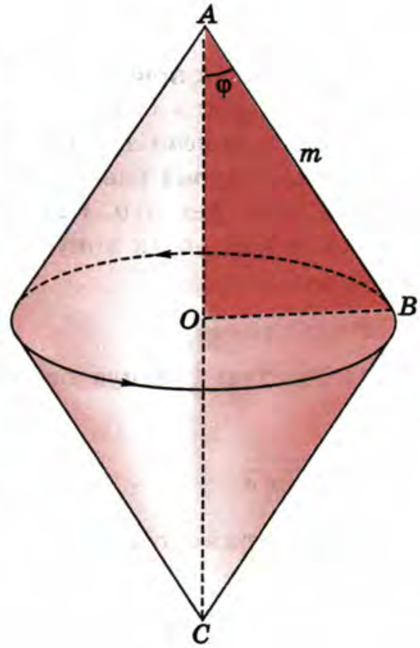
Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника. (Задача 566 учебника.)

Решение.

1) Тело, полученное при вращении равнобедренного треугольника ABC вокруг основания AC, состоит из двух ________________ с общим основанием, радиусом которого служит отрезок ______. Искомая площадь равна удвоенной площади ____________ поверхности конуса: $S =$ __ $S_{бок} =$ ______ $OB \cdot$ ______

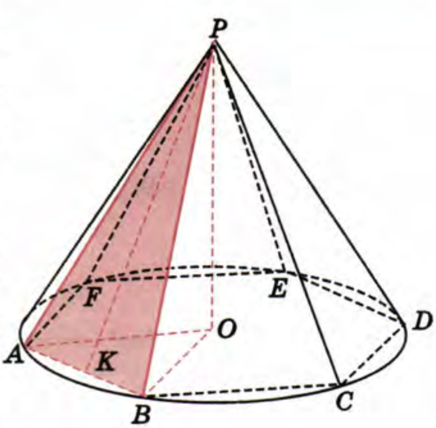
2) В прямоугольном треугольнике AOB $AB =$ ___, $OB =$ ___ $\cdot \sin \varphi$. Следовательно, $S =$ ______ $\cdot\, m \cdot$ ____________ $=$
$=$ ________ $\sin \varphi$.

Ответ. ________________



52

Высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см. Вычислите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус. (Задача 617в учебника.)



Решение.

1) Пирамида вписана в конус, если ее основание вписано в основание ____________, а вершина пирамиды совпадает с ________________ конуса. Пусть правильная шестиугольная ________________ $PABCDEF$ вписана в ____________ с высотой PO. По условию $PO =$ ____ см, $OA = OB =$ ____ см.

2) Сторона правильного шестиугольника равна радиусу __________________ около него __________________, поэтому $AB =$ ______ $=$ ____ см.

Площадь основания пирамиды $S_{осн}$ в ___ раз больше площади _______________ AOB, т. е. $S_{осн} = 6$ ________ $=$ ___ $OA^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_}=$

$=$ __________ $=$ __________ (см²).

3) Из прямоугольного ______________________ POA находим:

$PA = \sqrt{PO^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} =$ ___ (см).

4) Проведем апофему PK пирамиды. В прямоугольном треугольнике APK $AK =$ ___ $AB =$ ___ см, $PA =$ ___ см. Поэтому $PK = \sqrt{\_\_\_\_ - AK^2} =$

$= \sqrt{25 - \_\_\_\_} =$ _____ (см).

5) Площадь боковой поверхности $S_{бок}$ пирамиды в ___ раз больше площади ______________ грани PAB, поэтому

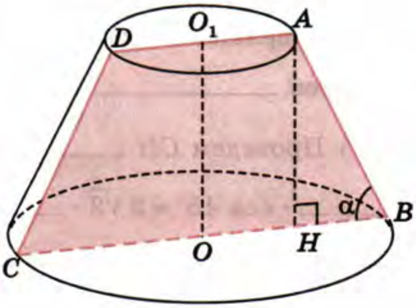
$S_{бок} = 6$ ________ $= 6 \cdot$ ___ $AB \cdot$ _____ $=$ _____ $\frac{\sqrt{91}}{\_\_} =$ __________ (см²),

$S_{пир} = S_{бок} + S_{осн} =$ ______________ $= 4{,}5\ (\sqrt{91} +$ _____ $)$ (см²).

Ответ. ____________________

53

Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, где $R > r$, а площадь осевого сечения равна $(R^2 - r^2)\sqrt{3}$. Найдите угол α между образующей и плоскостью основания конуса.



Решение.

Изобразим данный усеченный конус и построим его осевое сечение $ABCD$, которое является ______________ трапецией. По условию задачи $O_1A =$ ___, $OB =$ ___

1) Проведем $AH \parallel OO_1$. Тогда AH — перпендикуляр к __________ основания конуса, и, следовательно, $\angle ABH = \alpha$ — угол между _______ AB и ______________ основания.

2) В прямоугольном треугольнике ABH $AH =$ ______ $\operatorname{tg} \alpha$. Так как $HB = OB -$ ______ $=$ ______ $- AO_1 = R -$ __ , то $AH = ($__ $-$ __$) \operatorname{tg} \alpha$.

3) $S_{ABCD} = \frac{BC + \_\_\_\_}{2} \cdot AH = \frac{2R + \_\_\_\_}{2}$ (__ $-$ __) $\operatorname{tg} \alpha = (R^2 -$ __) ________

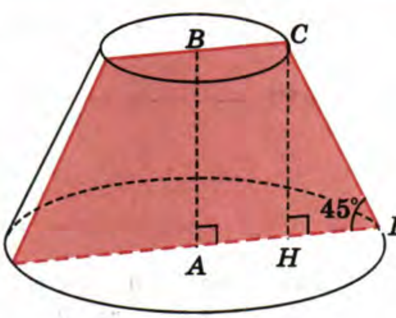
4) По условию задачи $S_{ABCD} = ($________$) \sqrt{3}$. Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha =$ $=$ ______, откуда $\alpha =$ ______

Ответ.

____

54

В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $BC = 4$ см, $CD = 3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усеченного конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB. (Задача 571 учебника.)



Решение.

При вращении данной трапеции получается ____________________ конус.

1) Проведем $CH \perp$ ______. Тогда $HD =$ $=$ ______ $\cdot \cos 45° = 3\sqrt{2} \cdot$ ______ $=$ __ см, $AD = AH +$ ______ $=$ ______ $+ HD =$ $=$ __ см.

2) $S_{бок} = \pi (BC +$ ______$) \cdot$ ______ $=$ __ (__ $+ 7) \cdot 3\sqrt{2} =$ ______ $\pi \sqrt{\_\_}$ (см²).

3) $S_{полн} = S_{бок} + \pi BC^2 +$ __________ $=$ __________ $+$ __________ $+ 49\pi =$ $=($________ $+ 65)\pi$ (см²).

Ответ.

__________ см² и ______________________

55

В усеченный конус вписана правильная усеченная треугольная пирамида (т. е. основания пирамиды вписаны в основания усеченного конуса). Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 5 см, а высота равна 4 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды. (Задача 631а учебника.)

Решение.

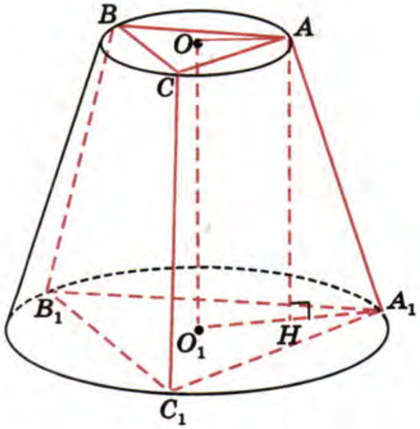
Пусть правильная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ вписана в усеченный конус с осью OO_1 (см. рис. *а*). По условию задачи $OA =$ ___ см, $O_1A_1 =$ ___ см, $OO_1 =$ ___ см.

1) Радиус OA окружности, описанной около правильного ______________ ABC, выражается через сторону AB формулой $OA = AB\,\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $AB = OA \cdot \sqrt{\_\_} =$ ____ (см), $S_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_} =$ ____ (см²).

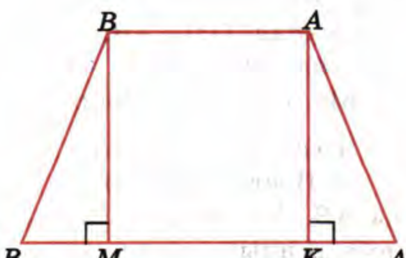
Аналогично получаем $A_1B_1 =$ ______ см, $S_{A_1B_1C_1} = A_1B_1{}^2 \cdot$ ______ = = ______ (см²).

2) Проведем $AH \perp O_1A_1$. Тогда $AH = OO_1 =$ ___ см, $HA_1 = O_1A_1 -$ _____ = = _____ $- OA =$ _______ = ___ (см). В прямоугольном треугольнике AHA_1

$AA_1 = \sqrt{AH^2 + \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_} =$ ___ (см).



а)



б)

3) Боковая грань AA_1B_1B усеченной пирамиды (см. рис. *б*) является ______________ трапецией, основания которой равны ______ см и ______ см, а боковая сторона равна ___ см.

Проведем в трапеции высоты AK и BM. Тогда $KA_1 = \frac{1}{2}(\_\_\_\_\_ - AB) =$
$= \_\_\_\_\_\sqrt{3}$ см, $AK = \sqrt{AA_1{}^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$ (см).

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + \_\_\_\_\_\_}{2} \cdot \_\_\_\_\_\_ = \frac{2\sqrt{3} + \_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_} \cdot \frac{\sqrt{73}}{\_\_\_} = \frac{\qquad}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Площадь боковой поверхности $S_{бок}$ усеченной пирамиды в ___ раза больше площади ____________ грани, т. е. $S_{бок} = 3S_{AA_1B_1B} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ см^2.

5) $S_{полн} = S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1} + \_\_\_\_\_\_\_\_ = 3\sqrt{3} + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$
$= \frac{\_\_\sqrt{3}}{\_\_\_\_}(\_\_\_\_\_ + \_\_\sqrt{73})$ (см^2).

Ответ. ____________________

§ 3 Сфера

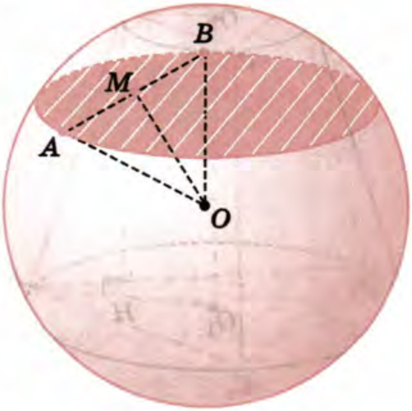
56

Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. Докажите, что:

а) если M — середина отрезка AB, то $OM \perp AB$;

б) если $OM \perp AB$, то M — середина отрезка AB.

(Задача 573 учебника.)



Доказательство.

а) Пусть точка M — середина отрезка AB, R — радиус сферы. $\triangle AOB$ равнобедренный, так как ____________ $= R$, поэтому медиана OM является также ________________, т. е. ____________ AB.

б) Пусть $OM \perp AB$. Треугольник AOB равнобедренный, и OM — его высота по ________________, следовательно, OM — его ________________, т. е. M — ______________________________

57

Точки A и B лежат на сфере с центром O, радиус которой равен 15 см. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $\angle AOB = \arccos \frac{3}{5}$.

Решение.

Пусть M — середина отрезка AB (см. рис. к задаче 56), тогда $OM \perp$ ______ (задача 56), и, следовательно, OM — искомое ____. Треугольник OMB прямоугольный ($\angle M =$ ______), поэтому $OM = OB \cdot \cos \angle$ ______, $\angle BOM = \frac{1}{2} \angle$ ______. По условию $\cos \angle AOB = \frac{3}{5}$, следовательно, $\cos \frac{1}{2} \angle AOB =$ ________________________ (так как $\cos^2 \frac{\alpha}{2} =$ ___________). Итак, $OM =$ ______________________ (см).

Ответ. ______ см.

58

Напишите уравнение сферы с центром в точке $P(-1; 3; 5)$ и радиусом $\frac{9}{4}$.

Решение.

$(x$ ______$)^2 + (y$ ______$)^2 + (z$ ______$)^2 =$ ______

59

Напишите уравнение сферы с центром в точке $P(2; 3; -3)$, проходящей через точку $M(2; -1; 1)$.

Решение.

$R = PM =$ ______________________________________. Уравнение сферы имеет вид $(x -$ ____$)^2 + (y -$ ____$)^2 + (z +$ ____$)^2 =$ ______

60

Напишите уравнение сферы с диаметром MN, если $M(-3;\ 5;\ 0)$, $N(1;\ -7;\ -2)$.

Решение.

Пусть $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — центр искомой сферы. Так как точка C — середина отрезка MN, то $x_0 = \frac{\_\_\_\_\_\_}{2} = \_\_\_\_\_\_$; $y_0 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; $z_0 = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$; C (____________). Радиус сферы равен отрезку CM, поэтому

$$R = \sqrt{(\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2} = \_\_\_\_\_\_$$

Итак, уравнение сферы имеет вид

$$(x\ \_\_\_\_\_\_)^2 + (y\ \_\_\_\_\_\_)^2 + (z\ \_\_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_\_$$

61

Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$;

б) $(x+2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 13$;

в) $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+8)^2 = 25$.

Решение.

а) C(________), $R =$ ______

б) C(________), $R =$ ______

в) C(________), $R =$ ______

62

Докажите, что данное уравнение является уравнением сферы, и найдите координаты центра и радиус этой сферы:

а) $x^2 - 8x + y^2 + z^2 - 16 = 0$;

б) $x^2 - 6x + 2y + z^2 + y^2 - 10z = 14$.

Решение.

а) Уравнение $x^2-8x+y^2+z^2-16=0$ можно записать в виде x^2-8x+ $+16+y^2+z^2=32$ или $(x\ \_\_\_\_\_\_)^2+(y\ \_\_\_\_\_\_)^2+(z\ \_\_\_\_\_\_)^2=\_\_\_\_\_\_$, поэтому оно является уравнением сферы с центром $C(\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$ и радиусом $R=\_\_\_\_\_\_$

б) Уравнение $x^2-6x+2y+z^2+y^2-10z=14$ можно записать в виде $(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)+(z^2-10z\ \_\_\_\_\_\_)=\_\_\_\_\_\_$ или $(x\ \_\_\_\_\_\_)^2+(y+\_\_\_\_\_\_)^2+$ $+(z\ \_\_\_\_\_\_)^2=\_\_\_\_\_\_$, поэтому оно является уравнением сферы с центром $C(\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$ и радиусом $R=\_\_\_\_\_\_$

63

Напишите уравнение сферы, радиус которой равен единице, если известно, что сфера проходит через точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ -1)$.

Решение.

Уравнение сферы имеет вид

$$(\_\_\_-x_0)^2+(\_\_\_\_\_\_\_)^2+(\_\_\_\_\_\_\_)^2=R^2=\_\_\_$$

Так как координаты данных точек должны удовлетворять этому уравнению, то, подставляя их в уравнение, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \\ x_0^2+(1-y_0)^2+z_0^2=1 \\ x_0^2+y_0^2+(-1-z_0)^2=1 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2y_0\ \_\_\_\_\_\_$, т. е. $y_0=\_\_\_\_\_\_$, а вычитая из третьего уравнения первое, находим: $z_0=-\frac{1}{2}$. Подставив найденные значения y_0 и z_0 в первое уравнение, найдем x_0: $x_0=\_\_\_\_\_\_$

Следовательно, уравнение сферы имеет вид (два решения):

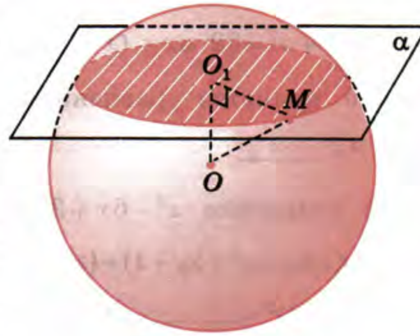
$$(x-\_\_\_\_\_\_)^2+(y-\_\_\_\_\_\_)^2+(z+\_\_\_\_\_\_)^2=1$$

и

$$(x+\_\_\_\_\_\_)^2+(y-\_\_\_\_\_\_)^2+(z+\_\_\_\_\_\_)^2=\_\_\_$$

64

Шар радиуса 17 см пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 8 см от центра. Найдите площадь сечения.



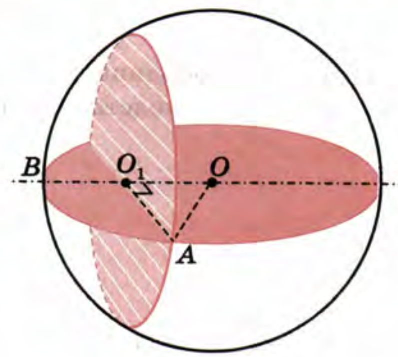
Решение.

Пусть точка O — центр шара радиуса $R=17$ см, α — секущая плоскость и $OO_1 \perp \alpha$. По условию задачи расстояние OO_1 от центра шара до секущей плоскости меньше радиуса шара, поэтому сечением шара плоскостью α является ________, площадь которого $S=$ __ r^2, где __ — радиус сечения. Возьмем точку M на линии пересечения сферы и плоскости α, тогда треугольник OO_1M ____________________ ($\angle O_1 =$ ________, $OM = R =$ __________, $OO_1 =$ __ см), откуда находим: $O_1M = r =$ __________, $S_{сеч} =$ ______________

Ответ. __________ см^2.

65

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к этому радиусу плоскость. Найдите отношение площади полученного сечения к площади большого круга.



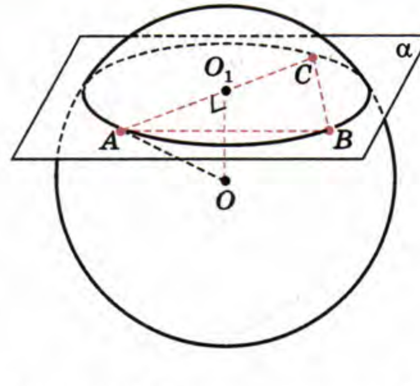
Решение.

Пусть точка O — центр данного шара, $OB=R$ — его радиус, точка O_1 — середина радиуса OB. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к OB и проходящей через точку O_1, есть ________, радиус которого $r =$ ______. Из ________ ______________________________ OO_1A находим: $r^2 =$ __________________. Следовательно, $\frac{S_{сеч}}{S_{бол.\ кр}} =$ ________________

Ответ. ______

66

Вершины треугольника ABC лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно $\sqrt{26}$ см, $AB=7$ см, $BC=24$ см, $AC=25$ см.



Решение.

Пусть точки A, B и C лежат на сфере с центром O. Через точки A, B и C проведем плоскость α, а из точки O — перпендикуляр OO_1 к этой плоскости. Тогда в сечении сферы плоскостью α получим ________________ с центром в ________ O_1, а точки A, B и C будут лежать на ________________. Таким образом, точка O_1 является центром окружности, ________________ около ________________. По условию $AC=25$ см, $BC=24$ см, $AB=7$ см, следовательно, треугольник ABC ________________ (по теореме, обратной ________________ : $25^2=$ ____ + ____). Поэтому AC — диаметр окружности с центром O_1, $O_1A=$ ____ см.

Так как $OO_1 \perp \alpha$, то $\triangle AO_1O$ — ________________ и $R=AO=$ $=$ ________ $=$ ________________ $=$ ________ $=$ ____ (см).

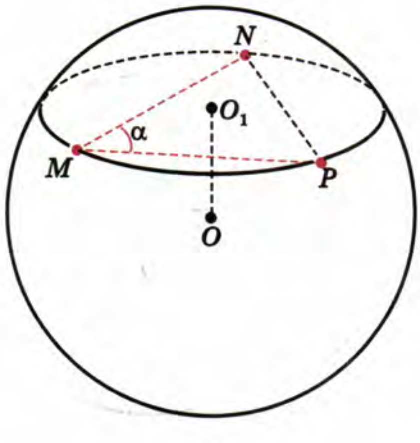
Ответ. $R=$ ________

67

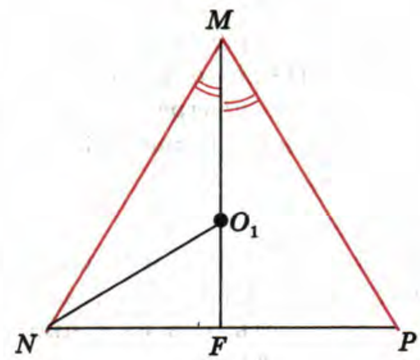
Точки M, N и P лежат на сфере радиуса $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $MN=MP=3$, $\angle NMP=\alpha$. На каком расстоянии от центра сферы находится плоскость MNP?

Решение.

Пусть точки M, N и P лежат на сфере с центром O, OO_1 — перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости MNP (см. рис. *а*). Сечение сферы плоскостью MNP является ________________ с центром ________, а точки M, N и P лежат на ________________ Следовательно, O_1 — центр ________________ около ________________



а)



б)

Найдем радиус r этой окружности. Так как $MN=MP$, то треугольник MNP ______________________ (см. рис. *б*), поэтому $NP=\underline{\quad}\ MN\ \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$

С другой стороны, $\frac{NP}{\sin\alpha}=2\underline{\quad}$ (теорема синусов), поэтому $r=O_1M=$

$$=\frac{NP}{\underline{\qquad\qquad}}=\frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\qquad\qquad}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\qquad\qquad}}$$

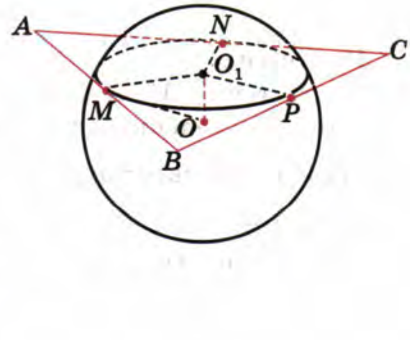
Так как $OO_1\perp MNP$, то $\triangle MO_1O$ прямоугольный и $O_1O=$

$$=\sqrt{\underline{\qquad\qquad}}=\underline{\qquad\qquad\qquad}=\frac{3}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Ответ. ____________

68

Все стороны треугольника ABC касаются сферы с центром O. Найдите радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости ABC равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $AB=3$ см, $BC=5$ см, $AC=7$ см.



Решение.

Пусть M, N и P — точки касания сферы со сторонами треугольника ABC, OO_1 — перпендикуляр, проведенный из

центра сферы к плоскости ABC. Сечением сферы плоскостью ABC является окружность с центром O_1, вписанная в ______________________
Найдем радиус этой окружности:

$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}=$ ____________________ $=$ _________ (см^2).

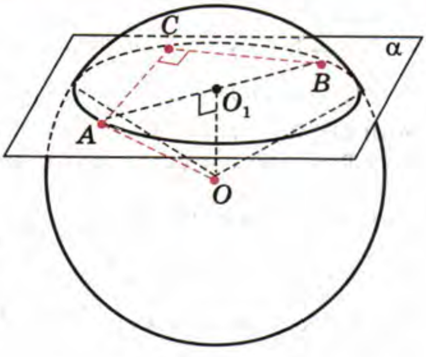
С другой стороны, $S_{ABC}=p\cdot r$, где p — ____________________, а r — ____. Поэтому $\frac{15\sqrt{3}}{4}=$ _________,

откуда $r=$ _____ см.

Так как $OO_1\perp ABC$, то треугольник OO_1M ______________________ ($\angle O_1=90°$, $OO_1=$ _____ см, $O_1M=$ _____ см), поэтому $R=OM=$ $=$ ______________ $=$ _________ $=$ _____ (см).

Ответ. _____ см.

69



Вершины прямоугольного треугольника с катетами 1,8 см и 2,4 см лежат на сфере.

а) Докажите, что если радиус сферы равен 1,5 см, то центр сферы лежит в плоскости треугольника.

б) Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 6,5 см. (Задача 620 учебника.)

Решение.

а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_}=$ $=$ ___ (см), т. е. равна ______________ сферы. Поэтому центр сферы является ______________ гипотенузы и, следовательно, лежит в плоскости ______________________________

б) Пусть вершины прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC=1{,}8$ см и $BC=2{,}4$ см лежат на сфере с центром O, OO_1 — перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости ABC. Сечение сферы этой плоскостью является ____________________ с центром

______________, а прямоугольный треугольник ABC ______________ в эту окружность. Следовательно, точка O_1 — ______________ гипотенузы AB, а так как $AB =$ ______________ $=$ ______________ $=$ ______ $=$ ___ (см), то $AO_1 =$ ___________

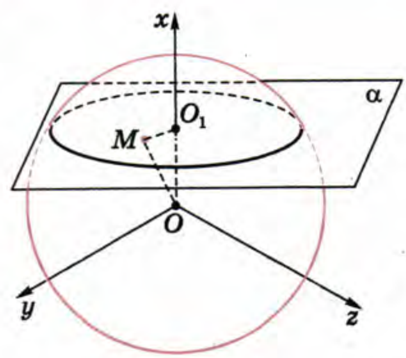
Так как $OO_1 \perp \alpha$, то треугольник AO_1O ______________________________

$OO_1 =$ ________________ $=$ ________________ $=$ ________ (см).

Ответ. б) ________ см.

70

Найдите радиус сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2; 4; 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс. (Задача 623 учебника.)



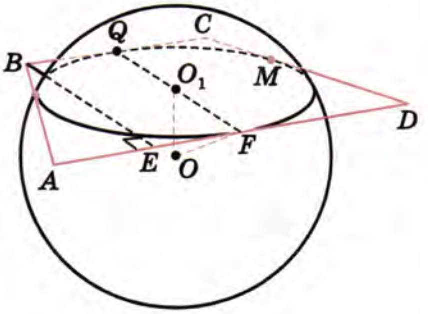
Решение.

Центром данной сферы является точка $O($___; ___; ___$)$, а ее радиус R равен ___. Пусть OO_1 — перпендикуляр, проведенный из точки O к секущей плоскости. Так как секущая плоскость по условию перпендикулярна к ______________________, то отрезок OO_1 лежит на ______________________. Абсцисса любой точки секущей плоскости равна абсциссе данной точки M, т. е. равна _____. Поэтому $OO_1 =$ ______, а искомый радиус r сечения находим по формуле $r = O_1M = \sqrt{R^2 - \_\_\_\_\_\_}$, т. е. $r = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_} =$ ______

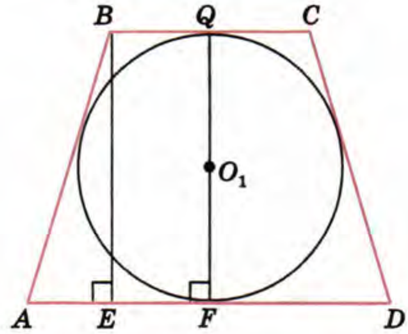
Ответ. ______________

71

Все стороны равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ касаются сферы, радиус которой равен $a\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции, если $AB = CD = a\sqrt{5}$, $AD = a(1 + \sqrt{5})$.



а)



б)

Решение.

Пусть стороны трапеции $ABCD$ касаются сферы с центром O и радиусом R, отрезок OO_1 — перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости трапеции. Тогда точки касания сторон трапеции и сферы лежат на окружности, ____________ в эту трапецию, и O_1 — ______________

________________________________ (см. рис. *а*). Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. *б*). Пусть r — радиус вписанной в нее окружности, BE — высота трапеции. Так как в трапецию можно вписать окружность, то

$2AB =$ ____________, откуда $BC =$ ____________________ $=$ ______________

Далее, $AE = \frac{1}{2}$ ____________ $=$ ____________________ $=$ ___

Из ________________________________ треугольника BEA находим:

$BE =$ ______ $=$ ____. Но $BE = 2r$, поэтому $O_1F = r =$ ___. Так как F — точка касания сферы и трапеции, $OO_1 \perp$ ________, то $OF =$ ______

и из ______________________ треугольника OO_1F (см. рис. *а*) находим:

$OO_1 =$ ________________ $=$ ______

Ответ. ________________

72

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении. (Задача 589 учебника.)

Решение.

Пусть секущая плоскость β проходит через конец A диаметра AB сферы с центром O и радиусом R, а окружность с центром O_1 и радиусом O_1A является сечением сферы плоскостью β. Тогда

$OO_1 \perp$ _____ и $\angle$ ________ $= \alpha$, так как это

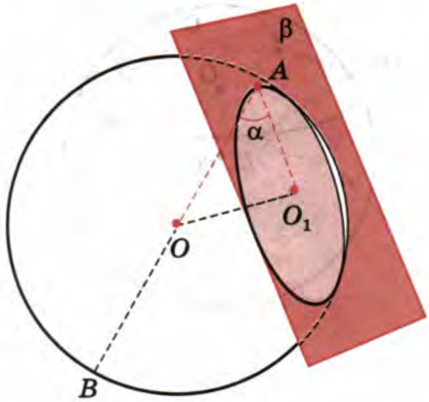
угол между прямой AB и ______________

______________________ на плоскость β.

Из ____________________ треугольника OAO_1 находим радиус окружности сече-

ния: $AO_1 =$ _______________. Длина этой

окружности равна _______________



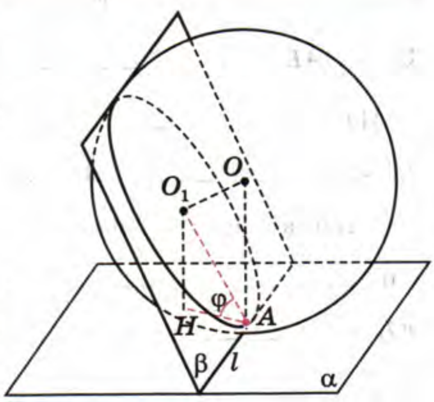
Ответ. _______________

73

Плоскость α касается сферы в точке A. Докажите, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку A и образующими равные углы с плоскостью α, имеют равные радиусы.

Доказательство.

Пусть секущая плоскость β, проведенная через точку A, лежащую на сфере с центром O и радиусом R, образует угол φ с плоскостью α, касающейся этой сферы в точке A. Тогда $OA \perp$ ___. Пусть O_1 — центр, r — радиус полученного сечения, l — линия пересечения плоскостей α и β, O_1H — перпендикуляр к плоскости α.



1) Так как $l \perp O_1A$ (l — ________________________ к окружности с центром O_1, O_1A — радиус ________________________, проведенный __________________ касания), то $l \perp HA$ (теорема ___________________ _____________). Поэтому $\angle$ ________ $= \varphi$ (линейный __________________

____________ между _______________________________).

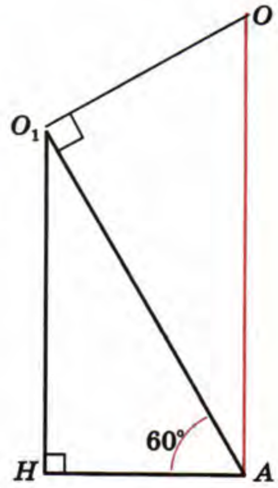
2) Поскольку $OA \perp \alpha$ и $O_1H \perp \alpha$, то OA __ O_1H, и, следовательно, отрезки AH, O_1A и OA лежат в одной ______________________, а значит, $\angle OAO_1 =$ ________

3) Из __________________________________ треугольника AO_1O получаем $r = O_1A =$ _____________________________ = ___________

Итак, радиус окружности, полученной в сечении сферы плоскостью β, зависит лишь от радиуса ___________ и угла между __________________ __________. Отсюда следует, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку A и образующими равные углы с плоскостью α, имеют равные радиусы.

74

Через точку A сферы проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом в 60° к касательной плоскости. Найдите расстояние от центра сферы до секущей плоскости, если радиус сферы равен 13 см.



Решение.

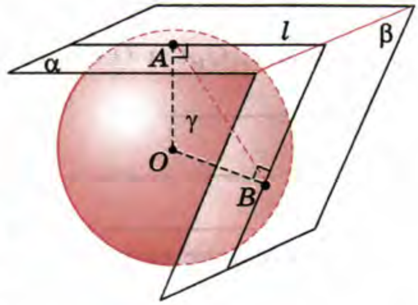
Пусть секущая плоскость β, проведенная через точку A, лежащую на сфере с центром O и радиусом $OA = 13$ см, образует угол в 60° с плоскостью α, касающейся этой сферы в точке A (см. рисунок к задаче 73 и ее решение). Рассмотрим плоскость, заданную параллельными прямыми O_1H и OA (см. рис.), где ______ — искомое расстояние от центра сферы до секущей плоскости β. Так как $\angle$ ________ $= 60°$ (по ______________), то $\angle OAO_1 =$ ______ = = _________ = ______ (см).

Поэтому в прямоугольном треугольнике _______ $OO_1 =$ ____ $OA =$ = _____ (см).

Ответ. ______ см.

75

Две касательные плоскости к сфере пересекаются по прямой l. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна l.



Доказательство.

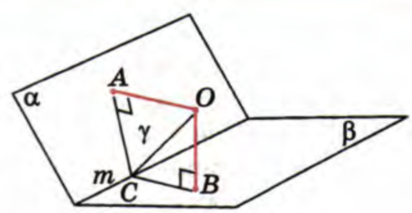
Пусть A и B — точки касания сферы с центром O и плоскостей α и β, l — линия пересечения этих плоскостей. Тогда $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$ (так как радиус, проведенный в ________ касания сферы и ______________________________ к этой плоскости).

Через пересекающиеся прямые OA и OB проведем плоскость γ. Так как $OA \perp \alpha$, то прямая OA перпендикулярна к любой ____________, лежащей ______________, и, следовательно, $OA \perp l$. Аналогично $OB \perp$ __

Таким образом, прямая l перпендикулярна к двум пересекающимся прямым (_____ и _____), лежащим ______________ γ. Поэтому $l \perp$ __, а так как прямая AB лежит ______________, то $l \perp$ _____

76

Сфера касается граней двугранного угла 120°. Найдите радиус сферы и расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно a. (Задача 591 учебника.)



Решение.

Пусть полуплоскости α и β — грани данного двугранного угла, прямая m — ребро этого угла, а точка O — центр сферы, касающейся граней двугранного угла в точках A и B. Тогда $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$ (так как радиус, ______________________________

______________________________).

Проведем через пересекающиеся прямые OA и OB плоскость γ. Она пересечет ребро m в некоторой точке C.

1) $m \perp OA$, так как OA ________ , аналогично m ________ , поэтому $m \perp \gamma$ (по признаку ____

______________________________). Отсюда следует, что угол ACB линейный ____, т. е. $\angle ACB =$ ________ , а $OC =$ ______

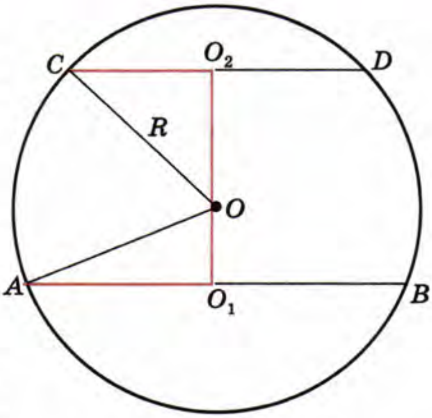
2) Точка O равноудалена от сторон угла ACB, так как ______ = = ______ $= R$, где R — радиус сферы, следовательно, она лежит на его ____________________________, т. е. $\angle OCB =$ ______ . Из ________________ треугольника OCB находим: $OB = R =$ ______________________ = ________ , $BC =$ ______ . Аналогично получаем $AC =$ ______

3) Из равнобедренного треугольника ACB, в котором $AC =$ ______ = = ______ , $\angle ACB =$ __________ , находим AB: $AB = 2 \cdot AC \cdot \sin$ ______ = = ________

Ответ. ________ , ________

77

Радиусы двух параллельных сечений сферы, расположенных по разные стороны от ее центра, равны 3 см и 4 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 7 см. Найдите площадь сферы.



Решение.

Рассмотрим сечение сферы радиуса R плоскостью, проходящей через ее центр O и перпендикулярной секущим плоскостям. В сечении получим окружность с центром O и радиусом R (окружность большого ________________), хорды AB и CD которой — диаметры ________________ ________________, причем $AB \parallel$ ______ . Пусть $OO_1 \perp AB$, $OO_2 \perp CD$, тогда $OA =$ ______ = ______ , $O_1A = 4$ см, $O_2C = 3$ см, $O_1O_2 = 7$ см. Пусть $OO_1 = x$ (см), тогда $OO_2 =$ ________ (см). Из ________________________________ треугольников AO_1O и CO_2O получаем $R^2 =$ ____ + ____ и $R^2 =$ __________ +

+ ____, откуда $x^2 + 16 =$ ____________________________ и $x =$ ____

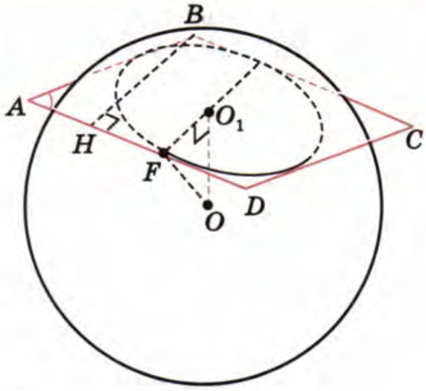
Итак, $OO_1 =$ ______ см, поэтому $R =$ ______ см, $S_{\text{сферы}} =$ _________ =

= _________ = _________ (см^2).

Ответ. _________ см^2.

78

Все стороны ромба касаются сферы. Сторона ромба равна 2 см, а угол равен 60°. Расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сферы.



Решение.

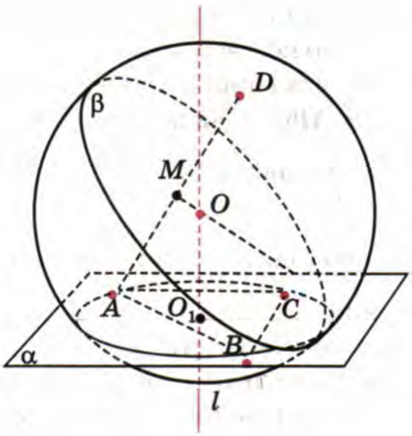
Пусть стороны ромба $ABCD$ касаются сферы с центром O и радиусом R, отрезок OO_1 — перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости ромба. Тогда точки касания сторон ромба и сферы лежат на окружности, ____________________ ______________ в этот ромб и O_1 — центр ________________________. Проведем высоту BH ромба. Радиус r вписанной окружности равен ______ BH. Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = AB \cdot$ ___________ = = ___________ = ______ (см), следовательно, $r =$ ___________. Пусть F — точка касания стороны AD ромба и сферы. Из __________________________ треугольника O_1OF, в котором $OO_1 =$ ______ см, $O_1F =$ ______ см, находим радиус сферы: $R = OF =$ __________________ = ______ = ______ (см).

$S_{\text{сферы}} =$ ___________ = ___________ = ______ (см^2).

Ответ. ________ см^2.

79

Докажите, что через четыре точки, не лежащие в одной плоскости, проходит сфера, и притом только одна.



Доказательство.

Пусть данные точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Через любые три из них, например через точки A, B и C, проведем плоскость α и в ней отметим точку O_1 — центр окружности, ________

____

Множество всех точек пространства, равноудаленных от точек A, B и C, есть прямая l, проходящая через ________ окружности, описанной около треугольника ______ и перпендикулярная ________

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от двух точек, например A и D, является плоскость β, перпендикулярная ________ и проходящая через его ________

Докажем, что прямая l пересекается с плоскостью β. Предположим, что прямая l не пересекает плоскость β. Тогда $l \parallel \beta$ либо $l \subset \beta$, и так как $l \perp$ __, то $\beta \perp$ __. Отсюда следует, что $AD \subset$ __ (поскольку $AD \perp$ __ и $A \in$ __), а значит, все данные точки A, B, C и D лежат в ________, что противоречит условию. Итак, прямая l пересекает плоскость β в некоторой точке O. Точка O равноудалена от ________ A, ________ и, следовательно, является центром сферы, проходящей через ________

Единственность сферы, проходящей через точки A, B, C и D, следует из того, что центр такой сферы лежит как на прямой l, так и в плоскости β и, следовательно, совпадает с точкой O.

80

Два прямоугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины данных прямоугольников лежат на одной сфере.

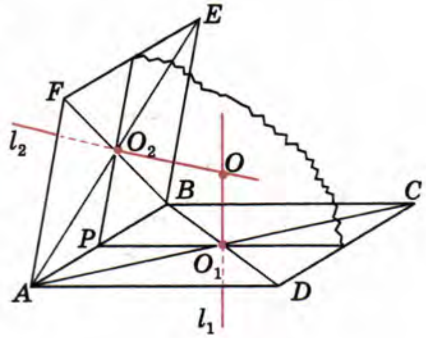
Доказательство.

Пусть $ABCD$ и $ABEF$ — данные прямоугольники с общей стороной ____________

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABCD$, является прямая l_1, перпендикулярная к ______________________________

____

и проходящая через точку O_1 пересечения ______________________________



Аналогично множество всех точек пространства, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABEF$, есть прямая l_2, перпендикулярная к

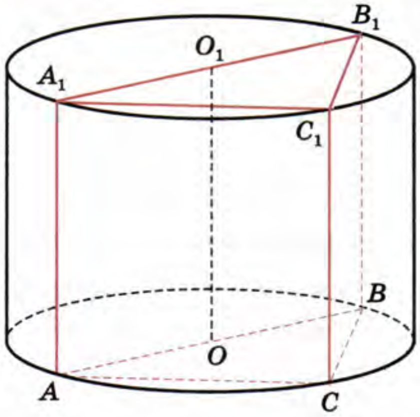
____

и проходящая через точку O_2 ____

Докажем, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Для этого рассмотрим плоскость O_1PO_2, где точка P — середина ________________. В плоскости O_1PO_2 через точки O_1 и O_2 проведем прямые, перпендикулярные соответственно PO_1 и _____. Они пересекаются в некоторой точке O. $AB \perp O_1PO_2$, так как $AB \perp$ ______ и $AB \perp$ ______. Следовательно, прямая AB ____________________________ прямым O_1O и _____, лежащим в плоскости O_1PO_2. Так как $O_1O \perp PO_1$ и $O_1O \perp$ ________________, то $O_1O \perp ABC$ (по признаку ____

____). Аналогично доказывается, что $O_2O \perp$ ________. Отсюда следует, что прямые l_1 и O_1O ________________ и также совпадают прямые ________________, а это означает, что прямые l_1 и l_2 ________________ в точке _____. Итак, $OD =$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ $= OE$, т. е. точка O — центр сферы, проходящей через точки A, ___, ___, ___, ___ и ___

81



Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны. (Задача 629 учебника.)

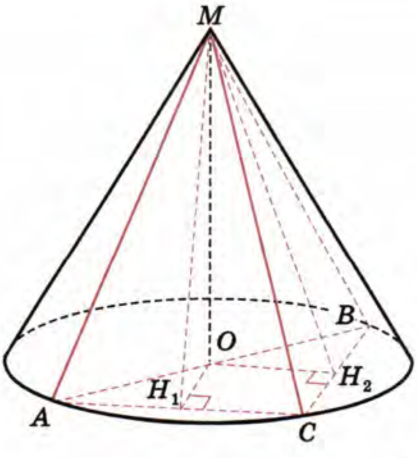
Доказательство.

На рисунке изображена призма $ABCA_1B_1C_1$, вписанная в цилиндр так, что ее боковая грань AA_1B_1B проходит через ось OO_1 цилиндра.

Требуется доказать, что боковые грани AA_1C_1C и BB_1C_1C взаимно перпендикулярны, т. е. двугранный угол с ребром CC_1, образованный плоскостями этих граней,— прямой.

Боковые ребра вписанной призмы являются образующими цилиндра, поэтому они перпендикулярны ____, в частности $CC_1 \perp ABC$. Отсюда следует, что $CC_1 \perp CA$ и $CC_1 \perp$ ________________, а значит, угол ACB линейный ____. Так как грань AA_1B_1B проходит через точку O, то AB — __________________________ основания цилиндра. Поэтому $\angle ACB =$ __________, т. е. указанный двугранный угол с ребром CC_1 ________________________, что и требовалось доказать.

82



В конус с высотой 12 см вписана треугольная пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамиды и конуса.

Решение.

На рисунке изображена пирамида $MABC$, вписанная в конус с осью MO так, что ее вершина M совпадает с вершиной конуса, а прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 8$ см и $BC = 6$ см вписан в основание конуса. Отрезок MO — высота конуса и по условию $MO=$ ________. Так как треугольник ABC ________________________, то гипотенуза AB является __________ основания конуса, $AB=$ ________ и точка O — ______________ отрезка AB.

Из ____________________ треугольника AMO, в котором $MO=$ ________, $AO=$ ________, находим: $AM=\sqrt{\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_}=$ $=\sqrt{12^2+\_\_\_\_\_\_}=13$ (см).

Боковые ребра пирамиды MA, _____ и _____ являются __________ ________ конуса, поэтому $MA=$ _____ $=$ _____ $=$ ________. Пусть MH_1 и MH_2 — высоты треугольников AMC и ______, тогда

$$MH_1=\sqrt{AM^2-\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_\_\_-\_\_\_\_\_\_}=\_\_\_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$MH_2=\sqrt{MB^2-\_\_\_\_\_\_}=\sqrt{\_\_\_\_\_\_-9}=\_\_\_\_\_\_ \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{полн. пир}}=S_{ABC}+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_=$$
$$=\frac{1}{2}(AC\cdot\_\_\_\_+AB\cdot\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_)=$$
$$=\frac{1}{2}(8\cdot 6+10\cdot 12+\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_\_)=$$
$$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{\text{кон}}=\pi r(\_\_\_+\_\_\_)=\pi\cdot\_\_\_(\_\_\_+\_\_\_)=\_\_\_\_\_\_ \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\frac{S_{\text{пир}}}{S_{\text{кон}}}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ответ. ________

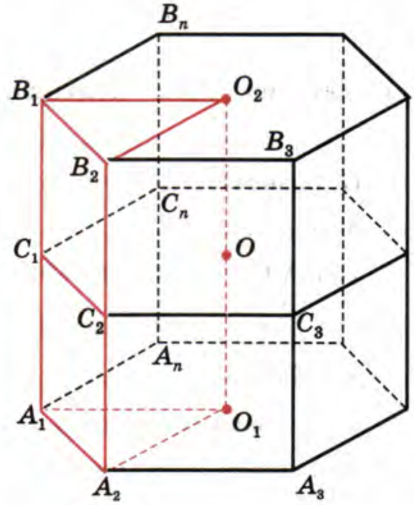
83

Докажите, что если в правильную призму можно вписать сферу, то центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы. (Задача 632 учебника.)

Доказательство.

Центр сферы, вписанной в многогранник, в частности в правильную призму, является точкой, равноудаленной от плоскостей всех ______________. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_nB_1B_2B_3\ldots B_n$ — правильная призма, в которую можно вписать сферу, точка O — центр вписанной сферы, O_1 и O_2 — центры оснований призмы.

Так как точка O равноудалена от плоскостей граней $A_1A_2B_2B_1$ и $A_1A_nB_nB_1$, то она лежит в полуплоскости (обозначим ее α), делящей пополам ________________ угол с ребром ______________. Полуплоскость α проходит через ребро _________ и параллельную ему прямую ______________, поскольку углы $A_2A_1A_n$ и $B_2B_1B_n$ являются ______________________________ двугранного угла с ребром _________, а лучи A_1O_1 и B_1O_2 — ________________ _______ этих линейных углов. Точно так же точка O лежит в полуплоскости β, делящей пополам двугранный угол с ребром A_2B_2. Полуплоскости α и β пересекаются по ________________. Следовательно, точка O лежит на ________________



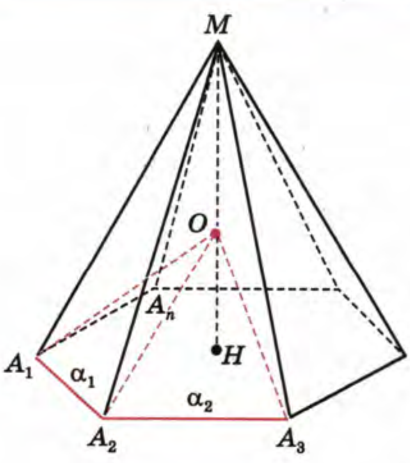
С другой стороны, так как точка O равноудалена от плоскостей оснований призмы, то она лежит в плоскости, параллельной плоскостям оснований и проходящей через ____________ отрезка O_1O_2. Итак, точка O есть ______________________________, что и требовалось доказать.

84

Докажите, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды. (Задача 633 учебника).

Доказательство.

На рисунке изображена правильная n-угольная пирамида $MA_1A_2...A_n$, MH — ее высота. Обозначим через α_1 полуплоскость, делящую пополам двугранный угол пирамиды при ребре A_1A_2; через α_2 — полуплоскость, делящую пополам ______________________ при ребре



A_2A_3; ...; через α_n — ____________________

____________________. В силу правильности пирамиды каждая из этих полуплоскостей пересекается с высотой MH в ____________________ (обозначим ее O). Следовательно, точка O равноудалена от всех ____________________ и потому является ____________________

Точка O — единственная общая точка полуплоскостей α_1, __________

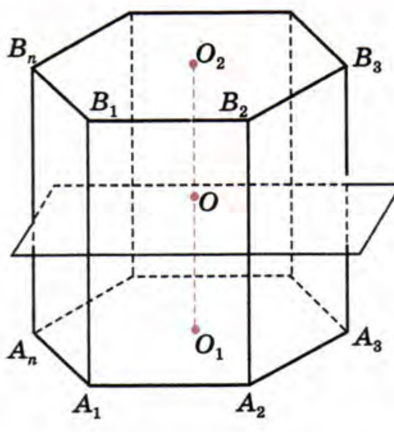
В самом деле, α_1 и α_2 пересекаются по лучу ______, а луч A_2O имеет с полуплоскостью α_3 только ____________________ точку — точку O. Итак, в правильную пирамиду можно ____________________, причем центр вписанной сферы лежит ____________________

85

Докажите, что центр сферы, описанной около:

а) правильной призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

б) правильной пирамиды, лежит на высоте пирамиды или ее продолжении. (Задача 637 учебника.)



Доказательство.

Центр сферы, описанной около многогранника, является точкой, равноудаленной от всех ____________________

а) Пусть $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2...B_n$ — правильная призма, точки O_1 и O_2 — центры ее оснований. Множеством всех точек пространства, равноудаленных от вершин основания $A_1A_2...A_n$, является ____________________, проходящая через ____________________ и перпендикулярная ____________________ этого основания, т. е. прямая __________. Эта же прямая является множеством всех точек пространства, равноудаленных от ____________________

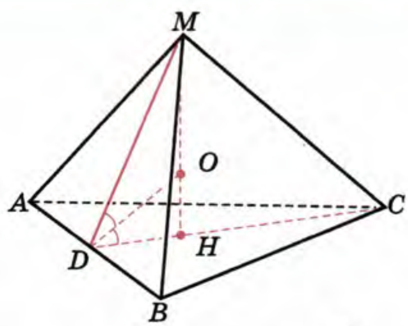
Следовательно, центр сферы, описанной около правильной призмы, лежит на ____________________

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от точек A_1 и B_1, является ________________, проходящая через ________________ ________________ и перпендикулярная ____________. Эта плоскость пересекается с отрезком O_1O_2 в его ________________. Таким образом, центром сферы, описанной около ________________________________, является ________________________________

б) Множеством всех точек пространства, равноудаленных от вершин основания правильной пирамиды, является ____________, проходящая через ______________________ и ________________________________ ________________________. Эта прямая содержит ____________ пирамиды, поэтому центр описанной ________________________ ________________ сферы лежит ____________________________ или ______________________

86

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

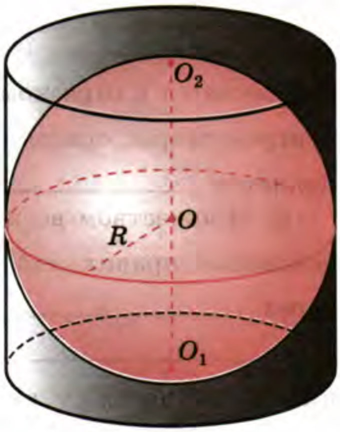


Решение.

Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида, MH — ее высота. Центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на высоте MH и $OH = r$ — искомый ________________________________. Пусть $CD \perp AB$, тогда $H \in$ ______ и $\angle MDC$ — линейный ________________________________ при ребре AB. По условию он равен __________. Так как точка O — центр вписанной сферы, то она является точкой пересечения полуплоскости, делящей пополам ________________________________ при ребре AB, и ее высоты MH. Поэтому луч DO — ____________ угла MDC и $\angle ODH =$ ______ Из ______________________ треугольника ________ находим радиус сферы: $OH =$ ____ $=$ ______

Ответ. ________________

87



Сфера вписана в цилиндр (т. е. она касается оснований цилиндра и каждой его образующей). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра. (Задача 642 учебника.)

Решение.

На рисунке изображена сфера с центром O и радиусом R, вписанная в цилиндр с осью O_1O_2 (точки O_1 и O_2 — центры ______________________________).
Центр сферы делит отрезок O_1O_2 ________ _______. $OO_1 =$ _______ $=$ _______. Плоскость, проходящая через центр сферы O и перпендикулярная оси цилиндра O_1O_2, пересекает сферу по ______________ ______________________________, а боковую поверхность цилиндра — по окружности, равной ____. Таким образом, радиус основания цилиндра равен ______, а высота цилиндра равна ______. Так как $S_{\text{сферы}} =$ ___________, $S_{\text{полн. цил}} =$ ___________________ $=$
$=$ __________________, то $S_{\text{сферы}} : S_{\text{полн. цил}} =$ ____________ : ____________ $=$ __________

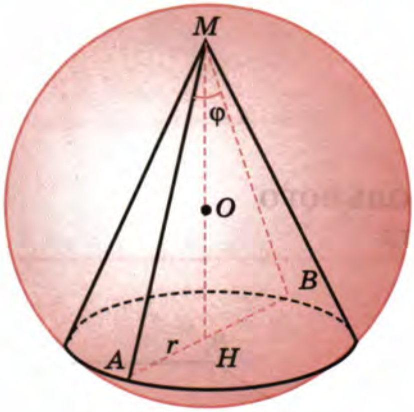
Ответ. ____________________

88

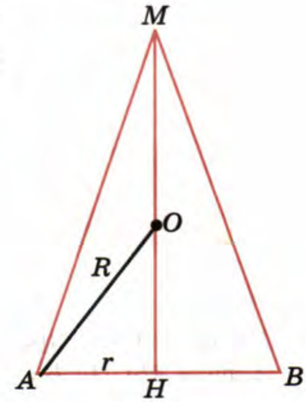
Конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан в сферу радиуса R (т. е. вершина конуса лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы). Найдите угол φ, если $R = 2r$. (Задача 646в учебника.)

Решение.

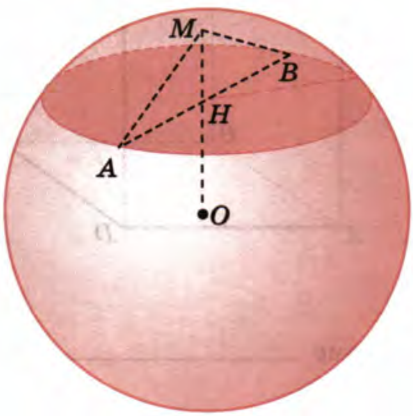
На рисунке изображен конус с высотой MH, вписанный в сферу с центром O и радиусом R. Так как отрезок MH перпендикулярен к плоскости _____________________________ и отрезок OH, соединяющий центр ___________ с центром сечения _____________________________________ ___________________________, перпендикулярен к плоскости основания, то прямые ______ и ______ совпадают, а значит, $O \in$ ______. Возможны два случая:



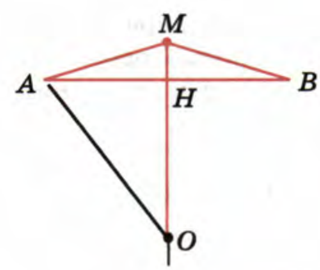
а)



б)



в)



г)

1) точка O лежит между точками M и ____ (см. рис. *а* и *б*);

2) точка H лежит между точками ____ и ____ (см. рис. *в* и *г*).

1) Рассмотрим осевое сечение конуса — ______________________________ треугольник ____________ (см. рис. *б*). В этом треугольнике $\angle AMB =$ ____, поэтому $\angle AMH =$ ________, а так как $OM =$ ________ $= R$, то $\angle OAM = \angle$ ______________ $=$ $=$ ________. Угол AOH — внешний угол ________________________ AOM, поэтому $\angle AOH =$ ________ $+$ ________ $=$ ______. В ______________________________ треугольнике AOH $AO =$ ______, $AH =$ ______, а так как по условию $R =$ ________, то $\frac{AH}{AO} =$ $=$ ________ $= \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle AOH =$ ________, т. е. $\varphi =$ __________

2) Второй случай рассмотрите самостоятельно.

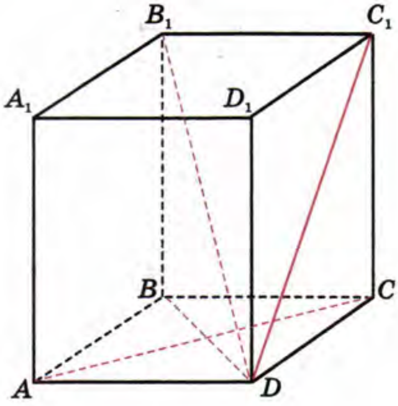
Ответ. ________________________

Глава VII

Объемы тел

§ 1 Объем прямоугольного параллелепипеда

89



Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC=15$ см, $DC_1=4\sqrt{13}$ см, $DB_1=17$ см.

Решение.

Пусть V — искомый объем, тогда $V=AB\cdot AD\cdot AA_1$. Из определения прямоугольного параллелепипеда следует, что его боковые ребра ______________ к плоскости основания, а основанием является ________________________

1) $\triangle B_1BD$ — ____________________,
так как B_1B ________ ABC, причем
$BD=$ _____ $=$ _____ см, $DB_1=$ _____ см. По теореме ____________________
$BB_1=$ ________________ $=$ __________ (см).

2) $\triangle B_1C_1D$ — _________________________, так как B_1C_1 ____________,
причем $DC_1=$ __________ см, $B_1D=$ _____ $=$ _____ см. Следовательно,
$B_1C_1=$ ________________ $=$ __________ (см).

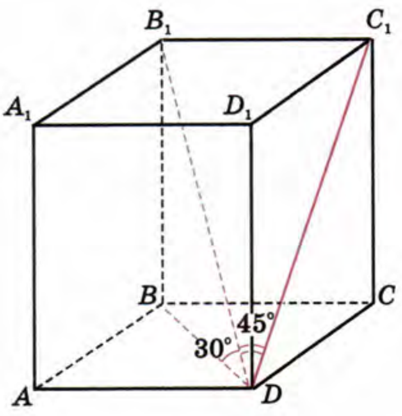
3) $\triangle BAD$ — _________________________ и $BD=$ _____ $=$ _____ см, $AD=$
$=$ ________ $=$ _______ см, поэтому $AB=$ ________________ $=$ __________ (см).

Итак, $V=AB\cdot$ _________________ $=$ _________________ $=$ ________ (см^3).

Ответ. _______ см^3.

90

Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если известно, что его диагональ равна $4\sqrt{2}$ см и составляет с плоскостью основания угол в 30°, а с плоскостью боковой грани угол в 45°.



Р е ш е н и е.

На рисунке изображен данный прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Так как прямая BD — проекция прямой ______ на ______________________, то $\angle B_1DB =$ ________

Из ______________________ треугольника B_1DB находим: $BB_1 =$ __________ $=$

$=$ ________ (см), $BD = 4\sqrt{2} \cdot$ ____________ $=$

$=$ ________ (см).

2) Так как прямая C_1D — проекция ____________________ на плоскость D_1CC_1, то $\angle B_1DC_1 =$ __________. Из ____________________________ треугольника B_1DC_1 находим: $B_1C_1 =$ _______ $=$

$= B_1D :$ ______ $=$ _____ (см).

3) $\triangle BAD$ ____________________________________, $BD =$ _____________, $AD =$

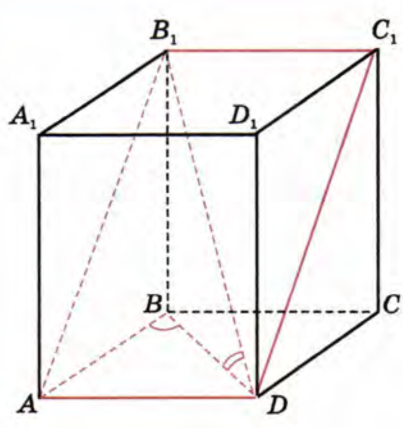
$=$ ________ $=$ ________ см, поэтому $AB =$ ____________ $=$ ______ $=$ ________ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ __________________ $=$ ________________________ $=$ ____________

О т в е т. ____________________

91

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ B_1D составляет с плоскостью основания угол в 45°, а двугранный угол A_1B_1BD равен 60°. Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см. (Задача 656 учебника.)



Р е ш е н и е.

На рисунке изображен данный прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) По условию $\angle B_1DB = 45°$, поэтому из ____________________________ треугольника B_1BD находим: $BB_1 =$ ______ $=$ ________

2) $\angle ABD$ — линейный угол ______________________________ угла A_1B_1BD (так как $BA \perp$ _________ и $BD \perp$ _________), поэтому $\angle ABD = 60°$, $AB =$ _________, $AD =$ _________ $=$ _________ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ ________________ $=$ ______________ $=$ ____________________________

Ответ. ________________________

92

Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{13}$ см. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.

На рисунке к задаче 91 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $BD = \sqrt{5}$ см, $DC_1 = \sqrt{10}$ см, $BC_1 = \sqrt{13}$ см.

Тогда $\begin{cases} AB^2 + AD^2 = \_\_\_\_\_\_ \\ AB^2 + CC_1^2 = \_\_\_\_\_\_ \\ AD^2 + CC_1^2 = \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$. Отсюда

$2AB^2 + 2AD^2 + 2CC_1^2 =$ ______, $AB^2 + AD^2 + CC_1^2 =$ ______, $AC_1 =$ ______ см (так как в прямоугольном параллелепипеде ______________________________ ____).

Теперь находим измерения параллелепипеда:

$$AB = \sqrt{AC_1^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)}.$$

Итак, $V =$ ____________________________ $=$ ______ (см^3).

Ответ. ______ см^3.

93

Сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна 4 см и составляет с диагональю основания угол в 30°. Через данную сторону и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, плоскость которого составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объем параллелепипеда.

Решение.

На рисунке к задаче 91 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $AD=4$ см, $\angle CAD=30°$. Из прямоугольного треугольника ADC находим: $DC=$ ____________ $=$ ____________ $=$

$=$ ________ (см). Плоскость сечения, проходящего через ребра AD и B_1C_1, составляет с плоскостью основания $ABCD$ угол в 60°, поэтому $\angle C_1DC=$ ______ (как ____________ двугранного угла ________).

Из ____________________ треугольника CC_1D находим: $CC_1=$ ____________ $=$ ____________ $=$ ________

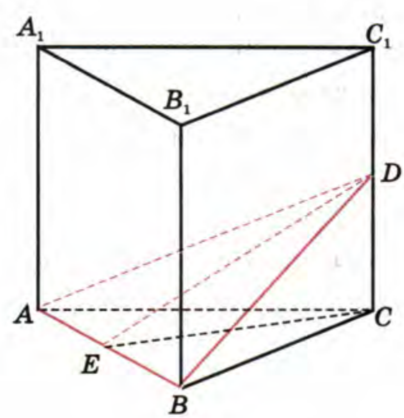
Итак, $V=AD\cdot$ ____________ $=$ ____________ $=$ ________ (см³).

Ответ. ________ см³.

§ 2 Объем прямой призмы и цилиндра

94

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону AB нижнего основания и середину ребра CC_1 проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объем призмы, если ее боковое ребро равно $2b$.



Решение.

На рисунке изображена правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка D — середина ребра CC_1 и $\triangle ADB$ — проведенное сечение. Поскольку призма правильная, то $CC_1 \perp$ ________ и объем V призмы равен $S_{ABC}\cdot$ ______. Так как $AD=BD$ (как гипотенузы равных ____________________ ADC и ________), то треугольник ADB ____________________

Пусть точка E — середина AB. Тогда $DE\perp$ ______ и $CE\perp$ ______, и, следовательно, $\angle DEC$ — ____________________ двугранного ____________

______. По условию $\angle DEC =$ ______, поэтому из ________________________ треугольника DCE, в котором $DC =$ ___, находим: $EC = b :$ ____________ $=$
$=$ ____________

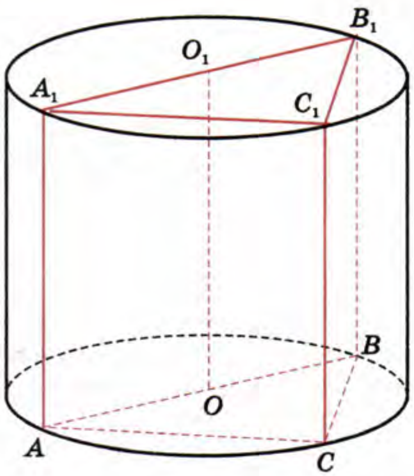
В ________________________ треугольнике ACE $\angle ACE =$ ______, поэтому $AE = EC \cdot$ ____________________ $=$ ___, и, следовательно, $AB = 2$ ______ $=$ ______,
$S_{ABC} =$ ____________ $=$ ____________

Итак, $V =$ ____________ $\cdot CC_1 =$ ____________ $\cdot$ ______ $=$ ____________

Ответ. ____________________

95

В цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 24 см^2, вписана призма. Основанием призмы является прямоугольный треугольник с катетом, равным $2\sqrt{3}$ см, и прилежащим к нему углом в 30°. Найдите объем цилиндра.



Решение.

На рисунке изображены цилиндр и вписанная в него призма $ABCA_1B_1C_1$. Из определения вписанной в цилиндр призмы следует, что $AA_1 \perp$ ________, и основания призмы вписаны в ____________________
____

Имеем: ______________________________ треугольник ABC вписан в окружность основания цилиндра, поэтому его гипотенуза ______ является ____________________ ______________________________________, а прямоугольник AA_1B_1B — осевое ____. Из треугольника ABC находим: $AB = AC :$ _______________ $=$ _______________ $=$ ______ (см).

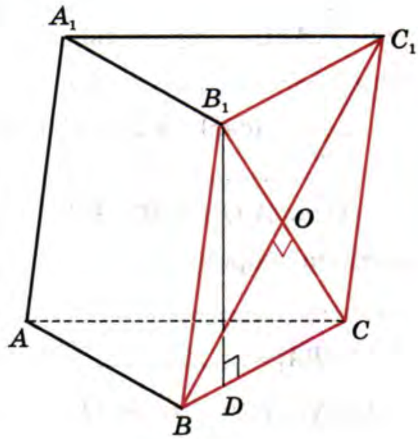
Следовательно, радиус цилиндра $r =$ __________________ $=$ ______________
По условию $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot$ ____________ $=$ ______ (см^2), откуда $AA_1 =$ __________
$V_ц = \pi \cdot$ ____________ $=$ _______________ $=$ _________ (см^3).

Ответ. _________ см^3.

§ 3 Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса

96

Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что ее основания — правильные треугольники, боковая грань BB_1C_1C является ромбом и образует с плоскостью ABC угол в 90°, причем $B_1C = 12$ см, $BC_1 = 16$ см.



Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма. Так как $V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot$ ______, то требуется найти ______________________________

____

1) Четырехугольник BB_1C_1C — ромб с диагоналями $B_1C = 12$ см и $BC_1 = 16$ см. Поскольку $\triangle BOC$ — ______________

и его катеты $BO = \frac{1}{2}$ __________ = __________, $CO =$ ________ = ________,

то сторона ромба $BC =$ __________, $S_{ABC} =$ ____________ = ____________ =

= __________ (см²).

2) По условию плоскости BB_1C_1 и ABC ____________________,

поэтому высота B_1D ромба BB_1C_1C является и ____________________

Таким образом, надо найти высоту B_1D ромба. В треугольнике BB_1C имеем: $BO \cdot B_1C = BC \cdot$ ____________, откуда $B_1D =$ ________________ =

= __________ = ______ (см).

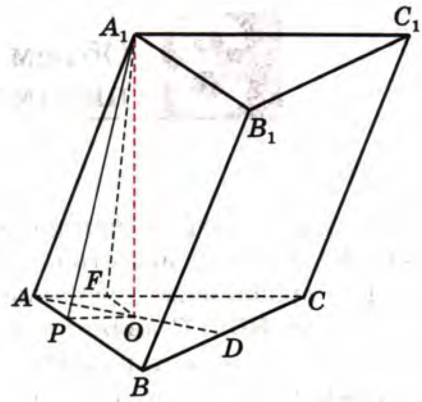
Итак, $V_{\text{призмы}} =$ ________________ = __________ (см³).

Ответ. ______________

97

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник со стороной $AB = 6$ см, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$, $AA_1 = 8$ см. Найдите объем призмы.

Решение.



На рисунке изображена данная наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$. Ее объем вычисляется по формуле $V = S \cdot H$, где S — площадь треугольника ________, H — ____________________. Так как по условию $\triangle ABC$ — правильный, то его площадь $S =$ ____________ $=$ ____________ $=$ $=$ ________ (см²). Остается найти ________ ______________________________

Пусть $A_1O \perp ABC$, $OP \perp AB$, $OF \perp AC$, тогда по теореме ____________________ ______________________________ $A_1P \perp$ ______ и $A_1F \perp$ ______

$\triangle APA_1 =$ __________ по гипотенузе (AA_1 — __________ гипотенуза) и острому углу ($\angle A_1AP =$ __________ $=$ ______ по условию), поэтому $OP =$ ______, и, следовательно, луч AO — ____________________ ________, а значит, $\angle OAP =$ ______

Из ____________________ треугольников A_1AP, APO и A_1AO находим последовательно: $AP = AA_1 \cdot$ ______________ $=$ __________ $=$ $=$ _____ см, $AO = AP \cdot$ __________ $=$ ______________ $=$ __________ см и $A_1O = \sqrt{\qquad\qquad}$ $=$ ______________ $=$ ________ см.

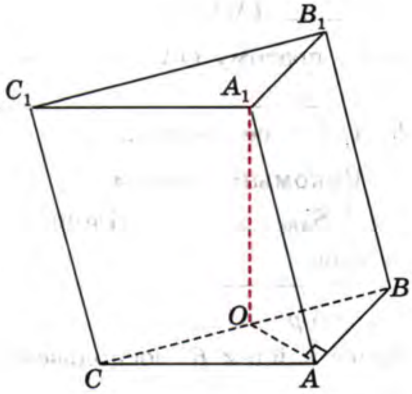
Итак, $V =$ ________________ $=$ ________ (см³).

Ответ. ________ см³.

98

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 7$ см и $AC = 24$ см. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найдите объем призмы, если ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол в 45°. (Задача 679 учебника.)

Решение.



На рисунке изображена данная призма $ABCA_1B_1C_1$. Середина O гипотенузы BC треугольника ABC является центром окружности, ____________________ ____________________. Так как по условию точка A_1 равноудалена от вершин A, B и C, то она лежит на прямой, перпендикулярной к __________ __________ и проходящей через центр ____________________ ____________________ — точку O, поэтому $A_1O \perp$ ______, т. е. A_1O — ____________________ призмы

Объем призмы вычисляется по формуле $V = S_{ABC} \cdot A_1O$, следовательно, нужно найти S_{ABC} и A_1O.

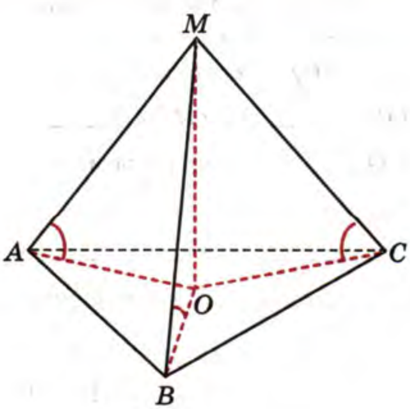
$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ __________ = __________ = ______ (см²).

Из ____________________ треугольника AOA_1 найдем высоту A_1O. Так как прямая AO — проекция ________________ на плоскость ________, то $\angle A_1AO$ — угол между ____________ и плоскостью ________. По __________ $\angle A_1AO = 45°$, поэтому $A_1O =$ ______ = ______ $CB =$ ______ (см).

Итак, $V =$ __________ = ________ (см³).

Ответ ________ см³.

99



В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник со сторонами 10, 10 и 12 см. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Пусть $MABC$ — данная пирамида, отрезок MO — ее высота. Тогда $\angle MAO =$ __________ = __________ = ______ ____________________ треугольники MAO, MBO и ________ равны по

________ (MO — ____________________) и ________________________

углу, поэтому $OA=$______$=$______, а значит, точка O — центр ________

____

$R=OA$ — ее радиус.

Искомый объем ______________ вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot$______. Площадь треугольника ABC находим по формуле Герона:

$S_{ABC}=\sqrt{p\cdot______\cdot______\cdot______}=$______________$=$______ (см^2).

Далее найдем R, воспользовавшись формулой $R=(abc):$______. Получаем $R=$______ см.

Из ______________________ треугольника MAO находим ______

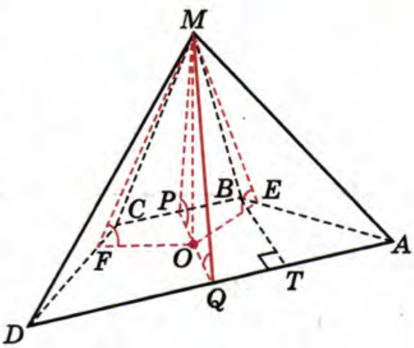
$MO=R\cdot$__________$=$______ (см).

Итак, $V=$________________$=$________________$=$________ (см^3).

Ответ. ________ см^3.

100

В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом в 30°. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 60°, высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.



Решение.

Пусть $MABCD$ — данная пирамида, отрезок MO — ее высота, ME, MP, MF, MQ —высоты боковых граней. Тогда $OE\perp$______, $OP\perp$______, $OF\perp$______, $OQ\perp$______ (по теореме о ______________

____________________________), и, следовательно, $\angle MEO=$__________$=$

$=$__________$=$__________$=$______ (как ______________ углы ______

____________ углов между ______________________________________

__________). __________________________ треугольники MOE, MOP,

________ и ________ равны по катету (MO — ______________________) и

______________________, поэтому $OE=$ ______ $=$ ______ $=$

$=$ ______ . Отсюда следует, что окружность с центром O радиуса ______ является ______________________

Из ______________________ треугольника MOP находим: $OP=MO\cdot$ ________ $=$ ________ $=$ ____ (см).

Пусть BT — высота трапеции, тогда $BT=$ ______ $=2\cdot$ ____ $=6$ (см). Из ______________________ треугольника ABT, в котором $\angle A=$ ______ , находим: $AB=2\cdot$ ______ $=12$ см.

Так как в равнобедренную трапецию $ABCD$ можно вписать ______________________, то $BC+AD=2\cdot$ ______ $=24$ (см). Следовательно,

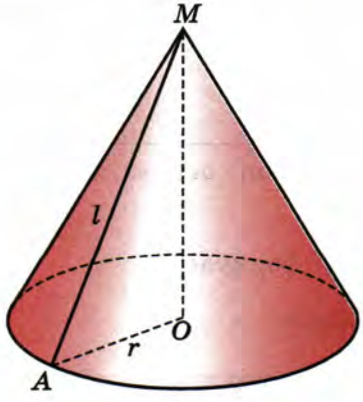
$S_{ABCD}=$ ______________________ $\cdot BT=$ ________ $\cdot$ ______ $=$ ______ (см^2),

$V_{MABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot$ ______ $=$ ______________ $=$ ________ (см^3).

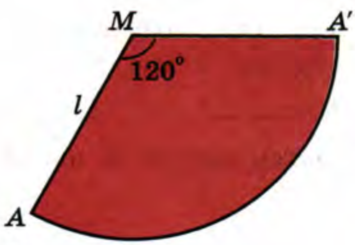
Ответ. ________ см^3.

101

Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120°, а площадь боковой поверхности конуса равна 24π. Найдите объем конуса.



а)



б)

Решение.

Данный конус с вершиной M и высотой MO изображен на рисунке *а*, развертка его боковой поверхности — на рисунке *б*. Пусть образующая конуса равна l, а радиус основания равен r. Тогда по

________ $S_{бок} = \pi$ ______ $= 24\pi$, откуда $rl =$ ______. С другой стороны,

$S_{бок} = S_{развертки} = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot$ ________ $=$ ________ $l^2 = 24\pi$. Отсюда получаем:

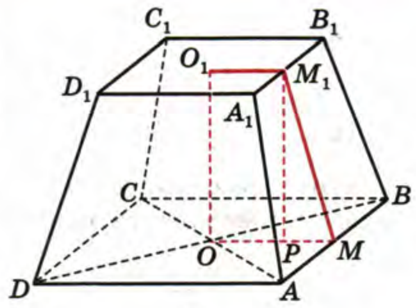
$l =$ ________, $r = 24 :$ ________ $=$ ________

Из ________________ треугольника MOA находим: $MO =$
$= \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_\_} =$ ______. Объем V конуса вычисляем

по формуле $V =$ ________ $=$ ________ $=$ ________

Ответ. ________________

102



В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 3 см и 6 см, апофема пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. Найдите объем усеченной пирамиды.

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ —данная правильная четырехугольная усеченная пирамида, тогда ее основаниями являются

________________ $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$,

отрезок OO_1, соединяющий центры оснований — ________________
а отрезок MM_1, соединяющий середины сторон оснований AB и A_1B_1,— ________________

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \_\_\_\_\_\_ (S_1 + \_\_\_\_\_\_),$$

где h — ________________, S и ________________

Так как $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 3$ см, то $S =$ ________, $S_1 =$ ________

Для нахождения высоты пирамиды рассмотрим четырехугольник OO_1M_1M, который является ______________________________

Пусть $M_1P \parallel OO_1$, тогда $MP =$ ______ $- M_1O_1 =$ __________ $=$ __________ и из ______________________ треугольника MPM_1 находим: $MP =$ $= \sqrt{\text{______________________}} =$ ______________ $=$ ________ $=$ ________ (см).

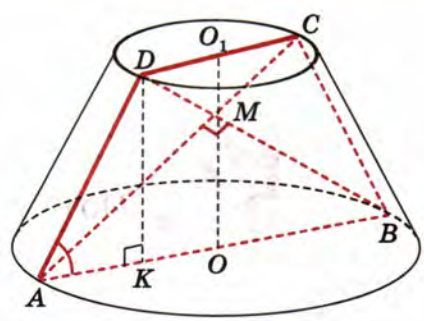
Следовательно, $OO_1 =$ ________ см.

Итак, $V =$ ____ $=$ ________ (см^3).

Ответ. ________ см^3.

103

В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол в 60° и равна 4 см. Найдите объем усеченного конуса.



Решение.

Пусть точки O и O_1 — центры оснований данного усеченного конуса, ______________________________ трапеция $ABCD$ — осевое сечение, M — точка пересечения его диагоналей. Тогда $\angle DAB$ — это угол, который составляет образующая AD конуса с плоскостью большего основания, т. е. $\angle DAB =$ ______, $AO = r$ и $DO_1 = r_1$ — радиусы оснований усеченного конуса. Поскольку $\angle AMB =$ ______, то $\angle MAB =$ $=$ __________ $=$ ______. Поэтому в треугольнике ADC имеем $AD = 4$ см, $\angle ACD =$ __________ $=$ ______, $\angle DAC =$ ______________ $=$ ______. По теореме ____________ $\dfrac{AD}{\sin \angle DCA} =$ ______________, откуда получаем: $CD = \dfrac{\text{____}}{\text{____}} =$ $= \dfrac{\text{__________}}{\text{__________}} =$ ______________ (см), а $r_1 = \dfrac{1}{2}$ ______ $=$ __________ (см).

В треугольнике ABC $BC =$ ______ см, $\angle A =$ ______, $\angle B =$ ______, а $\angle C =$ $= 180° -$ ______________ $=$ ______. По ______________________ $\dfrac{AB}{\sin 75°} =$

$=$ ________, откуда находим: $AB=$ ________________ $=$ ____________,

а $r=\frac{1}{2}$ _____ $=$ ________________

Проведем высоту DK трапеции, она является высотой ____________

____________. Из ____________________ треугольника ADK

находим: $DK=$ __________ $=$ _________ $=$ _______ (см), т. е. высота h

усеченного конуса равна ________

Объем усеченного конуса $V=\frac{1}{3}h\cdot(S+S_1+$ ______$)$, где S и S_1 —

______________________. Итак, $V=$ _________ $(\pi r^2+$ ___ $+$ ____ $)=$

$=$ ____ $=$ ______________ $=$

$=$ ______________ $=$ ___________ (см^3).

Ответ. __________ см^3.

§ 4 Объем шара и площадь сферы

104

Найдите отношение объемов шара и цилиндра, если высота цилиндра равна его диаметру, а радиус шара равен радиусу цилиндра.

Решение.

Пусть r — радиус цилиндра, тогда его высота равна _____, а радиус шара равен r. Следовательно, $V_{\text{цил}}=$ _____________ $=$ _________,

$V_{\text{шара}}=$ _________ и $\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{цил}}}=$ _________ $=$ _____

Ответ. ____________________

105

Шар и цилиндр имеют равные объемы, причем радиус шара равен $\frac{3}{5}$ высоты цилиндра. Найдите отношение радиусов шара и цилиндра.

Решение.

Объемы данных тел вычисляются по формулам $V_{\text{шара}} =$ ________ $\cdot R^3$, $V_{\text{цил}} =$ ________ $\cdot h$, где R — ________________, r — ________________ ________________________________, h — ________________

Так как по условию объемы шара и цилиндра равны, то ________ = = ________, откуда $\frac{4}{3}R^3 =$ ________. Поскольку по условию $R = \frac{3}{5}h$, то $h =$ ____________, и поэтому $\frac{4}{3}R^3 =$ ____________. Отсюда получим $\frac{R^2}{r^2} =$ ______, т. е. $\frac{R}{r} =$ ______

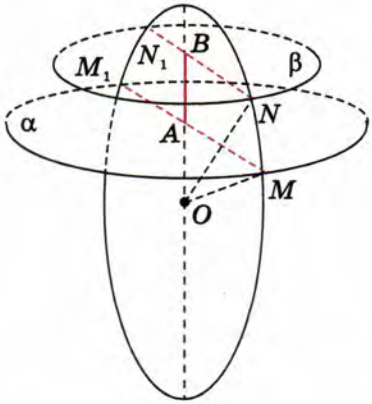
Ответ. ________________________

106

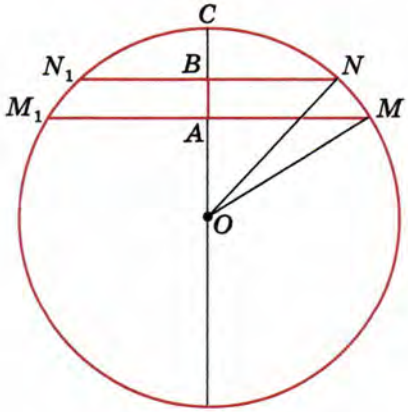
Расстояние между двумя плоскостями, перпендикулярными диаметру шара и расположенными по одну сторону от его центра, равно 1 см, радиусы сечений равны $3\sqrt{3}$ см и $4\sqrt{2}$ см. Найдите объем шарового слоя, заключенного между этими плоскостями.

Решение.

Пусть шар с центром O пересечен плоскостями α и β, перпендикулярными его диаметру CD, A и B — точки пересечения диаметра CD этими плоскостями (см. рис. *а*). Тогда $AB = 1$, а объем слоя, т. е. части



а)



б)

шара, заключенной между этими плоскостями, равен разности объемов двух шаровых сегментов, один из которых имеет высоту AC, а другой — ______

Так как объем шарового сегмента вычисляется по формуле $V_{сегм} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$, где R — ____________________, h — ________________ __________________, то необходимо найти R и высоты $h_1 = AC$ и $h_2 = BC$.

Рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через диаметр CD. Эта плоскость пересекает основания указанных шаровых сегментов по их диаметрам MM_1 и NN_1 (см. рис. *б*). В ____________________ треугольниках OAM и OBN имеем: $OM = ON =$ ______, $AM =$ ______________, $BN =$ ______________. Пусть $OA = x$, тогда $OB =$ __________

По теореме Пифагора $R^2 = x^2 +$ _______, $R^2 =$ _________ $+ 27$. Отсюда получаем $x^2 + 32 = (1 + x)^2 + 27$, или $x^2 + 32 =$ ________________________, и, следовательно, $x = OA =$ ____________

Далее, $R = \sqrt{x^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} =$ ______ (см), $h_1 = AC = OC -$ _______ $=$ $=$ _________ $-$ _________ $= 4$ см, $h_2 = BC = AC -$ _______ $=$ _________ $-$ _________ $=$ $=$ _________

Таким образом, $V_{слоя} = \pi h_1^2\left(R - \frac{1}{3}h_1\right) -$ _________________________________ $=$ $=$ _______________________________ $=$ _________________________ $=$ _________ (см³).

Ответ _________ см³.

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
46, 47	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	1—16
48	Связь между координатами векторов и координатами точек	17—21
49	Простейшие задачи в координатах	22—24
50, 51	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	25—27
52	Вычисление углов между прямыми и плоскостями	28—30
54—57	Центральная симметрия. Осевая симметрия. Зеркальная симметрия. Параллельный перенос	31—34
59	Понятие цилиндра	35—38
60	Площадь поверхности цилиндра	39—45
61	Понятие конуса	46, 47
62	Площадь поверхности конуса	48—53
63	Усеченный конус	54, 55
64	Сфера и шар	56, 57
65	Уравнение сферы	58—63
66	Взаимное расположение сферы и плоскости	64—72
67	Касательная плоскость к сфере	73—76
68	Площадь сферы	77—80
	Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар	81—88
74, 75	Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда	89—93
76	Объем прямой призмы	94
77	Объем цилиндра	95
79	Объем наклонной призмы	96—98
80	Объем пирамиды	99—102
81	Объем конуса	103
82	Объем шара	104, 105
83	Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора	106

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь

11 класс

Пособие для учащихся
общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художники *Е. В. Соганова, О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *В. В. Брагина*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технические редакторы *Е. А. Сиротинская, Л. В. Марухно*
Корректоры *И. А. Григалашвили, Н. И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.03.18. Формат $70\times100^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,52. Тираж 17 000 экз. Заказ № 6734.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Тульская типография» ОАО «Издательство «Высшая школа».
Россия, 300600, г. Тула, пр. Ленина, д. 109.